13:kafli: Að lesa tölfræði

Eftir að hafa lært tölfræði í Félagsvísindadeild Háskóla Íslands og kennt hana á félagsfræðibraut í menntaskóla veit ég að hún getur virkað framandi í fyrstu. Í tölfræðinni birtast nemendum nýjar reglur og framandi tákn, stórar og ljótar formúlur og framandlegur táknheimur. Textinn kann að virka sundurlaus og fráhrindandi sem hann örugglega er við fyrstu skoðun. Segja má að í tölfræðinámi þurfir þú jafnvel meira á að halda tákn-, formúlu-, hugtaka- og töflulæsi heldur en í hefðbundnu stærðfræðinámi hnitakerfisins, algebru og rúmfræði.

Markmið þessa kafla er að auka læsi þitt á tölfræði og tölfræðileg gögn og upplýsingar þannig að tölfræðin verði þér ljúf og skemmtileg aflestrar. Tölfræðin er stærðfræði félagsvísindanna, þeirra vísinda sem lýsa manninum og því samfélagi sem hann lifir í. Þú flettir ekki dagblaði í dag öðruvísi en að sjá tölfræðilega framsetningu á þeim veruleika sem við lifum í. Ég skoðaði einu sinni bók um starfsemi Reykjavíkurborgar. Ég hélt að ég væri að opna bók um sögu Reykjavíkur en ég varð undrandi þegar ég sá að hún innihélt ekkert annað en 300 blaðsíður af töflum og línuritum um starfsemi borgarinnar.

Það sem er hinsvegar gott er að tölfræðin snýst mikið um að setja gefnar tölur inn í gefnar formúlur sem á að vera auðvelt. Segja má að stærðfræðin sé alltaf auðveld þegar þú skilur hana og ekkert dæmi sé erfitt ef þú skilur það og veist hvernig á að reiknað það.

13.1 Framsetning tölfræðilegra gagna

Þegar þú lýsir gögnum í talnasafni er mikilvægt að lýsingin sé gegnsæ, skipulögð og lýsandi og gefi gott yfirlit yfir gögnin stundum kölluð lýsandi tölfræði.

Ég tek tvo teninga og kasta þeim 50 sinnum og þannig fæ ég 50 tölur og skrái útkomuna.

50 tölur:

11, 10, 10, 08, 04, 11, 08, 04, 08, 11

05, 09, 04, 12, 05, 07, 10, 07, 04, 07

10, 07, 05, 07, 11, 11, 03, 11, 04, 09

06, 10, 04, 11, 06, 04, 08, 09, 02, 07

06, 12, 03, 06, 02, 05, 03, 04, 07, 05

Þegar tölurnar eru settar upp á þennan hátt: allar í einu, þá er þetta ekki mjög lýsandi.

13.1.1 Tíðni

Tíðni = f = (frequency). Tíðni er mjög mikilvægt hugtak í tölfræðinni og segir til um hversu oft atburðir gerast. Setjum þessar 50 tölur upp í tíðnitöflu.

x	Talning	f
2	II	2
3	III	3
4	IIIIIII	7
5	IIIII	5
6	IIII	4
7	IIIIIIII	8
8	IIII	4
9	III	3
10	IIIII	5
11	IIIIIII	7
12	II	2
		$\sum f$ = 50 = N

f = Tíðnin

N= $\sum f$ = Samanlögð tíðni/heildarfjöldi

x = Mælitölurnar

Bara í þessari litlu tíðnitöflu koma fram fjögur ný tákn. Skoðum þau nánar:

x = Einstök mæling = mælitölurnar

f = Tíðni, hversu oft mælingin kemur fyrir

$\sum$ = Summa = samlagning

$\sum f$ = Samanlögð tíðni

N = $\sum f$ = Samtala tíðninnar

Ef til vill finnst þér ∑ summutáknið vera framandi en það þýðir einfaldlega samlagning:

Dæmi: ∑ (2,3,4,5,6) = 2+3+4+5+6 = 20

Því er við að bæta að formúlurnar sem við reiknum með eru settar saman af táknum.

13.1.2 Samanlögð tíðni

Oft getur verið gott að hafa dálk fyrir samanlagða tíðni til að sjá samtöluna í hverjum dálki. Skoðum aftur dæmið um teningana.

x	f = tíðni	Samanlögð tíðni
2	2	2
3	3	5
4	7	12
5	5	17
6	4	21
7	8	29
8	4	33
9	3	36
10	5	41
11	7	48
12	2	50
	N = 50	∑f = 50

Í dálknum sem nefnist *Samanlögð tíðni* leggjast dálkarnir saman einn af öðrum, þangað til heildarsumman ∑f = 50 = N

Dálkurinn með samanlögðu tíðninni gefur aðrar og meiri upplýsingar heldur en tíðnidálkurinn við hliðina gefur einn og sér.

13.1.3 Hlutfallsleg tíðni

Hugtakið hlutfall er eitt af þessum ógegnsæju hugtökum en hlutfall þýðir einfaldlega deiling. Setningin: „Hlutfallið á milli a og b" þýðir einfaldlega a/b. Segja má að prósentuformúlan sé líka deiling.

% = h / H

Hlutfallsleg tíðni er þá tíðni túlkuð sem % = deiling. Sjáum nú hvernig dæmið með teningunum mundi líta út sem hlutfallsleg tíðni eða sem prósenta = hluti/heild. Tveimur teningum er kastað 50 sinnum sjá hér að framan.

x	f = tíðni.	Hlutfall = h / H	Prósenta = %
2	2	2 / 50 = 0,04	4%
3	3	3 / 50 = 0,06	6%
4	7	7 / 50 = 0,14	14%
5	5	5 / 50 = 0,10	10%
6	4	4 / 50 = 0,08	8%
7	8	8 / 50 = 0,16	16%
8	4	4 / 50 = 0,08	8%
9	3	3 / 50 = 0,06	6%
10	5	5 / 50 = 0,10	10%
11	7	7 / 50 = 0,14	14%
12	2	2 / 50 = 0,04	4%
	N = 50	∑ = 1,00	∑ = 100%

Mikilvægt er að ∑ = 100% = heildin, verður að vera 100%.

13.1.4 Samanlögð hlutfallsleg tíðni

Samanlögð hlurfallsleg tíðni er svipað hugtak og samanlögð tíðni þar sem þú leggur saman lið fyrir lið. Tökum nú aftur dæmið um teningana:

x	f = tíðni.	Hlutfallsleg tíðni. = %	Samanlögð hlutfalls-leg tíðni.
2	2	4%	4 %
3	3	6%	10%
4	7	14%	24%
5	5	10%	34%
6	4	8%	42%
7	8	16%	58%
8	4	8%	66%
9	3	6%	72%
10	5	10%	82%
11	7	14%	96%
12	2	4%	100%
	N = 50	100%	∑ = 100%

Mikilvægt er að summan af hlutfallslegu tíðninni sé = 100% því annars hefur eitthvað farið úr skorðum. Tökum nú saman allar þessar upplysingar um hinar 50 tölur.

13.1.5 Túlkun hinna 50 talna

x	f= tíðni	Saman-lögð tíðni	Hlutfall % =h / H	Hlutfallsleg tíðni = %	Samanlögð hlutfallsleg tíðni
2	2	2	2 / 50 = 0,04	4%	4%
3	3	5	3 / 50 = 0,06	6%	10%
4	7	12	7 / 50 = 0,14	14%	24%
5	5	17	5 / 50 = 0,10	10%	34%
6	4	21	4 / 50 = 0,08	8%	42%
7	8	29	8 / 50 = 0,16	16%	58%
8	4	33	4 / 50 = 0,08	8%	66%
9	3	36	3 / 50 = 0,06	6%	72%
10	5	41	5 / 50 = 0,10	10%	82%
11	7	48	7 / 50 = 0,14	14%	96%
12	2	50	2 / 50 = 0,04	4%	100%
	N = 50			∑ = 100%	

Svona mundu tölurnar 50 líta út í meðförum tölfræðinnar. Þú sérð að það er önnur tilfinning að lesa þessa töflu heldur en að horfa á tölurnar 50 í einni bendu eins og við sáum þær fyrst.

13.1.6 Dreifing og lýsing gagna

Þegar á að lýsa dreifingu gagnasafns þarf að nota hin ýmsu hugtök og útreikninga, lýsa því hvernig gagnasafnið dreifist, hvar miðja þess er, upphaf, endir og fleira sem gott væri að vita.

13.1.6.1 Dreifisvið

Hvernig dreifist gagnasafnið? Hvar byrjar það og hvar endar það?

Dreifisvið = Hæsta gildi – lægsta gildi

Dæmi:

Finndu dreifisvið talnanna: 7, 9, 11, 13 17 21. Drefisviðið er 21 – 7 = 14

13.1.6.2 Bilskipting

Séum við með mjög margar tölur, t.d. 100 eða fleiri getur verið gott að bilskipta þeim til þess að fá betra yfirlit yfir dreifinguna. Séum við með 100 tölur á bilinu 1–25 getur bilskipt tíðnitafla litið út á þennan hátt:

Bilskiptingin	Tíðni = f	Miðpunktur bilsins
1 - 5	18	$\frac{1+5}{2}$ = 3
6 - 10	16	$\frac{6+10}{2}$ = 8
11 - 15	22	$\frac{11+15}{2}$ = 13
16 - 20	20	$\frac{16+20}{2}$ = 18
21 - 25	24	$\frac{21+25}{2}$ = 23
	N = 100	

Ef við lítum á dálk nr. 1 sjáum við að þar dreifast 18 mælingar á bilinu 1 – 5 en við vitum ekki hvernig. Því finnum við miðpunkt bilsins og lítum á hann sem eins konar fulltrúa fyrir bilið og er þá eins konar meðaltal fyrir bilið.

13.1.6.3 Miðpunktur bils

Endimörk bilsins eru lögð saman og deilt í með 2 = meðaltal bilsins.

Dæmi:

Bilið er 1 – 5 Þá er miðpunkturinn = $\frac{1+5}{2}$ **=** **3**

Miðpunkturinn er því = 3

Sjá töfluna hér á undan

13.1.6.4 Tíðasta gildi

Tíðasta gildi er gegnsætt og þægilegt hugtak = mælingin sem kemur oftast fyrir, það gildi sem segir töluvert til um dreifinguna.

Dæmi:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7

Hér er 4 tíðasta gildið kemur fyrir fimm sinnum af 15 mælitölum

13.1.6.5 Meðaltal

Meðaltal er að leggja saman allar tölurnar og deila í með fjölda þeirra. Formúlan fyrir meðaltal er:

$\overline{x} = \frac{\sum x}{N}$ $\overline{x}$ = Meðaltal. ∑x = Samlagning mælinganna

N = fjöldi mælinganna

Það verður að játast að þótt þessi formúla sé ekki stór er hún svolítið framandi.

Dæmi:

Reiknaðu meðaltal þessara 10 talna.

1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\overline{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7}{10} = \frac{40}{10} = \underline{4}$$

13.1.6.6 Vegið meðaltal

Þegar mælingar vega eða vigta ekki jafnt er talað um vegið meðaltal. Gott dæmi um þetta er einkunnagjöf í skóla. Þegar gefin er vetrareinkunn sem gildir 30% og prófseinkunn fyrir lokapróf gildir 70%. Þá er ekki nóg að leggja saman einkunnirnar og deila með tveimur. Heldur þarf að margfalda vetrareinkunnina með 0,30 og prófseinkunnina með 0,70 leggja þær saman og deila með 1,00.

Formúlan fyrir vegið meðaltal lítur svona út:

$$\overline{x_v} = \frac{\sum v \cdot x}{\sum v}$$

$\overline{x}$ = Vegið meðaltal

$\sum v \cdot x$ = Summan af mælingunum margfaldað með vægi

$\sum v$ = Summan af væginu

Dæmi:

Nemandi fær 8,0 í vetrareinkunn, sem gildir 30% og 5,0 í prófseinkunn, sem gildir 70%. Hver var lokaeinkunn hans?

$$\overline{x_v} = \frac{\sum v \cdot x}{\sum v}$$

$$x_v = \frac{8 \cdot 0{,}30 + 5 \cdot 0{,}70}{1{,}00} = \underline{6{,}0}$$

Dæmi:

Í A–bæ er meðalaldurinn 55 ára og þar búa 100 íbúar, en í B–bæ er meðalaldurinn 45 ára og þar búa 200 íbúar. Hver er meðalaldurinn í A-og B-bæ til samans?

$\overline{x_v} = \frac{\sum v \cdot x}{\sum v}$

$x_v = \frac{55 \cdot 100 + 45 \cdot 200}{100+200} = \frac{5500+9000}{300} = \frac{14500}{300} = \underline{48{,}3 \text{ ár.}}$

13.1.6.7 Meðaltal í bilskiptri tíðnitöflu

Í bilskiptri tíðnitöflu verður fyrst að finna miðpunktinn á bilinu, margfalda hann með tíðninni, leggja svo saman dálkinn og deila með fjölda. Þetta er orðað svona á táknmáli stærðfræðinnar:

Formúlan fyrir meðaltal í bilskiptri tíðnitöflu: $x = \frac{\sum f \cdot x}{N}$

$\overline{x}$ **= Meðaltal**

x = Miðpunkturinn = Mælingin

∑f·x = Samanlagður heildarfjöldi · mælingar

N = Tíðni = Fjöldi mælinga

Að sönnu er þetta svolítið skrítið að sjá, en skýrist fljótt og vel með sýnidæmi.

Dæmi:

Finndu meðalþyngd 80 nemenda, eins og hún birtist í þessari bilskiptu tíðnitöflu.

$\overline{x} = \frac{\sum f \cdot x}{N}$

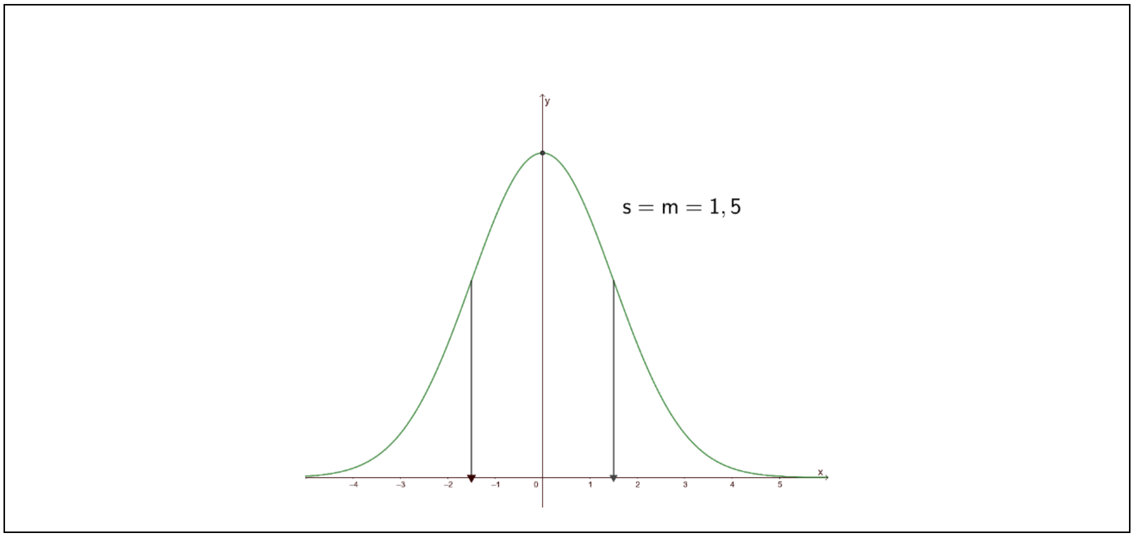
Þyngd kg	Miðpunkturinn x - kg	Tíðni = f	Tíðni·kg
65 - 69	67	4	268
70 - 74	72	12	864
75 - 79	77	28	2156
80 - 84	82	22	1804
85 - 89	87	14	1218
		N = 80	∑f·x = 6310

Deildu með heildarfjölda nemenda í heildarfjölda kílóa.

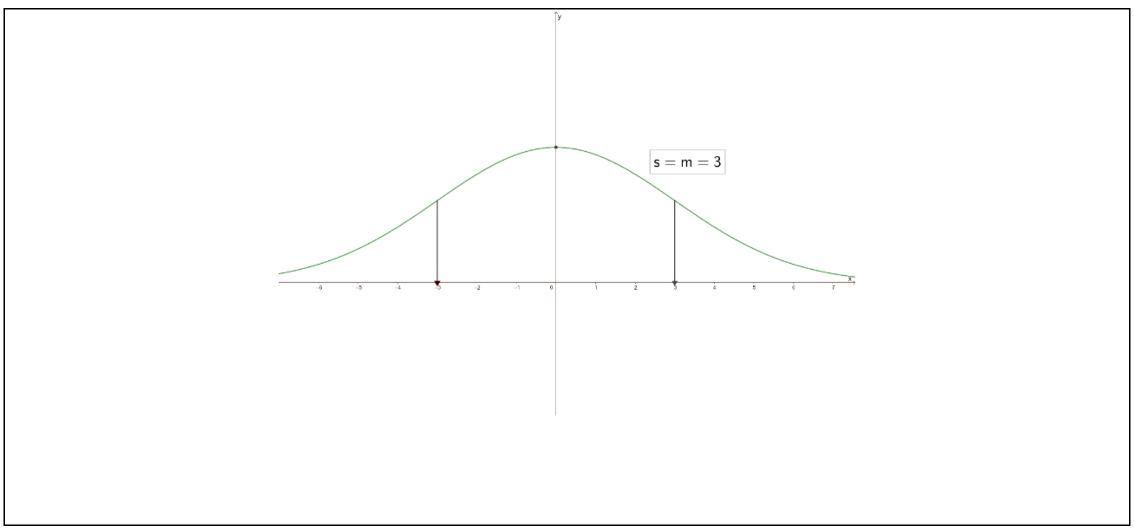
$\overline{x} = \frac{6310}{80}$ **78,875 kg.**

13.1.7 Meðalfrávik og staðalfrávik

Hugtökin meðalfrávik og staðalfrávik eru ekki sérlega gegnsæ og formúlurnar eru ekkert sérstakt augnayndi. Því er rétt að teikna hugtökin upp. Meðalfrávik og staðalfrávik mæla það sama eða hversu langt að meðaltali mælingarnar dreifast frá miðju. Ef meðalfrávikið eða staðalfrávikið er stutt frá miðju þá verður kúrfan mjó og turnlaga. Sjá mynd hér á eftir:



Ef staðalfrávikið eða meðalfrávikið er stórt, fara mælingarnar langt frá miðju og kúrfan verður lág og flöt. Sjá mynd hér á eftir.



Vonandi gera þessar myndir hugtökin meðalfrávik og staðalfrávik skiljanlegri. Oft er nefnilega gott ef hægt er að búa til mynd af hugtakinu. Það auðveldar okkur að skilja. Meðalfrávik og staðalfrávik mæla bæði hversu langt að meðaltali mælingarnar dreifast frá miðjunni = meðaltalinu. Meðalfrávik hefur formúlu sem byggir á talnagildi = stærð tölunnar í einingum óháð stefnu + eða - $|-a|$ = $|a|$ = a.

Formúlan fyrir meðalfrávik lítur svona út:

Meðalfrávik = $\frac{\sum\lvert x-\overline{x}\rvert}{N}$

Við skulum glósa formúluna:

∑ = Summa = samlagning
x = Mæling
$\overline{x}$ = Meðaltal
N = Fjöldi mælinga
| | = Tölugildistáknið

Staðalfrávikið hefur formúlu, sem notar annað veldi til þess að breyta mínus frávikum í plús. $(a)^2 = (-a)^2 = a^2$

Formúlan lítur svona út:

Staðalfrávik = $\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{N-1}}$

Við skulum glósa formúluna:

$\sum$ = Summa = samlagning

x = Mæling

$\bar{x}$ = Meðaltal

N = Fjöldi

Það að horfa á formúlurnar er ekki besta leiðin til þess að skilja. Best er að skoða sýnidæmi sem sýna hvernig formúlurnar virka. Skoðum sama dæmið reiknað með báðum formúlunum til þess að reikna hversu langt að meðaltali frávikin dreifast frá miðju. Sjá dæmi hér á eftir.

Dæmi:

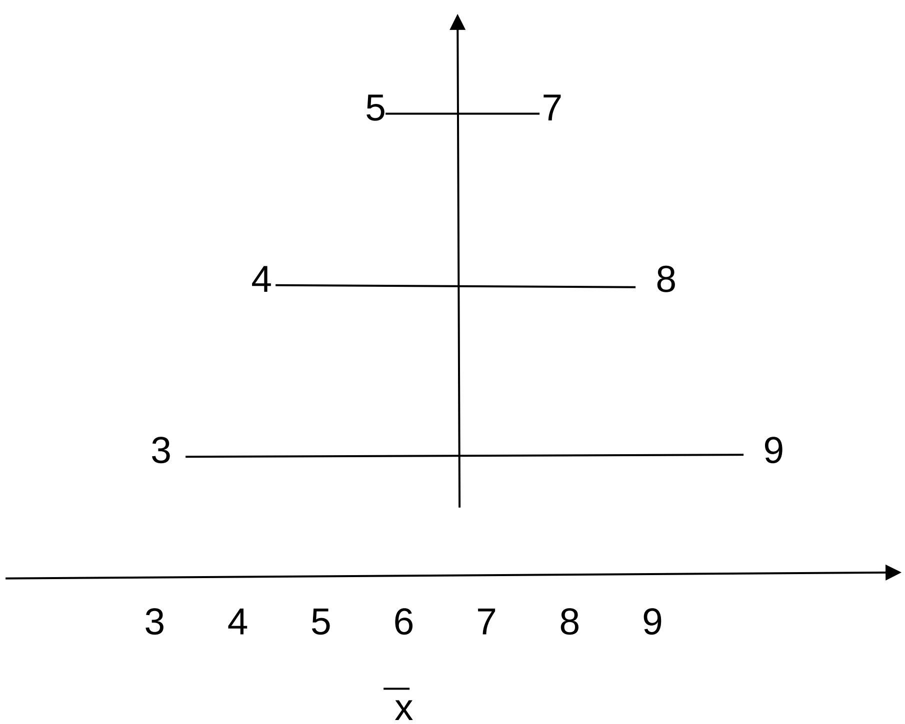
Hvert er meðalfrávik og staðalfrávik fyrir neðangreinda talnadreifingu?

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Fyrst þarf að finna meðaltalið: $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$

$\bar{x} = \frac{3+4+5+6+7+8+9}{7} = \frac{42}{7} = \underline{6}$

Gott er að teikna mynd af dreifingunni og frávikum til þess að skilja dæmið betur



Þá eru frávikin sem hér segir: (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)

Ef við leggjum frávikin saman verður útkoman = <u>0</u> Það er ekki gott því þá hverfa frávikin. Við verðum að túlka öll frávikin sem + tölur þannig að 3 + 2 + 1+ 0 + 1 + 2 +3 =<u>12</u> einingar frá miðju = að meðaltali x = 12 / 7 = <u>1,7</u>

Dæmi:

Reiknaðu meðalfrávikið.

$\lvert x - x \rvert$
$\lvert 3 - 6 \rvert = 3$
$\lvert 4 - 6 \rvert = 2$
$\lvert 5 - 6 \rvert = 1$
$\lvert 6 - 6 \rvert = 0$
$\lvert 7 - 6 \rvert = 1$
$\lvert 8 - 6 \rvert = 2$
$\lvert 9 - 6 \rvert = 3$
$\sum \lvert x - x \rvert = 12$

Meðalfrávik = $\frac{\sum \lvert x - \overline{x} \rvert}{N}$

Meðalfrávik = $\frac{12}{7} = 1{,}7$

Dæmi:

Reiknaðu staðalfrávikið.

$(x - x)^2$
$(3 - 6)^2 = 3^2 = 9$
$(4 - 6)^2 = 2^2 = 4$
$(5 - 6)^2 = 1^2 = 1$
$(6 - 6)^2 = 0^2 = 0$
$(7 - 6)^2 = 1^2 = 1$
$(8 - 6)^2 = 2^2 = 4$
$(9 - 6)^2 = 3^2 = 9$
$\sum (x - \overline{x})^2 = 28$

Staðalfrávik = $\sqrt{\frac{\sum (x - x)^2}{N-1}}$

Staðalfrávik = $\sqrt{\frac{28}{7-1}} = \sqrt{\frac{28}{6}} =$

$\sqrt{4{,}667} =$

<u>2,2</u>

Ekki kemur alveg sama niðurstaðan út úr báðum formúlunum en svipuð. Betra er að nota staðalfrávik ef um mikinn fjölda mælinga er að ræða. Skoðum nú meðalfrávik og staðalfrávik í tíðnitöflum en þá þarf að margfalda frávikin með tíðninni = f. Skoðum dæmi um meðalfrávik í tíðnitöflu.

Dæmi:

Reiknaðu meðalfrávikið í þessari tíðnitöflu.

x	f	f·x	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	f · $\lvert x - \bar{x} \rvert$
3	1	3	$\lvert 3 - 6 \rvert = 3$	1·3 = 3
4	3	12	$\lvert 4 - 6 \rvert = 2$	3·2 = 6
5	2	10	$\lvert 5 - 6 \rvert = 1$	2·1 = 2
6	3	18	$\lvert 6 - 6 \rvert = 0$	3·0 = 0
7	2	14	$\lvert 7 - 6 \rvert = 1$	2·1 = 2
8	3	24	$\lvert 8 - 6 \rvert = 2$	3·2 = 6
9	1	9	$\lvert 9 - 6 \rvert = 3$	1·3 = 3
	N = 15	∑fx = 90		$\sum f \cdot \lvert x - \bar{x} \rvert = 22$

Meðaltal: $\bar{x} = \dfrac{\sum f \cdot x}{N} = \dfrac{90}{15} = \underline{6}$

Meðalfrávik $= \dfrac{\sum f\ (x - \bar{x})}{N} = \dfrac{22}{15} = \underline{1{,}5}$

Reiknum nú staðalfrávikið fyrir tíðnidreifinguna í dæminu á undan. Þá notum við formúluna fyrir staðalfrávik í tíðnitöflu:

Staðalfrávik = s = $$\sqrt{\frac{\cdot\sum f x^2 - (\sum f x)^2}{N(N-1)}}$$

Hún er ekki sérlega falleg formúla fyrir augað.

S = Staðalfrávik

N = Fjöldi mælinga

∑ = Summa = samlagning

f = Tíðni

x = Mæling

Reiknum nú dæmið hér að framan með staðalfráviks formúlunni. Sjá næstu síðu.

Dæmi:

Reiknaðu staðalfrávikið í þessari tíðnitöflu.

x	**Tíðni = f**	**f·x**	f·x^2
3	1	3	1·9 = 9
4	3	12	3·16 = 48
5	2	10	2·25 = 50
6	3	18	3·36 = 108
7	2	14	2·49 = 98
8	3	24	3·64 = 192
9	1	9	1·81 = 81
	N = 15	∑f·x = 90	∑fx^2 = 586

$$s = \sqrt{\frac{N \cdot \sum x^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 586 - 90^2}{15(15-1)}} = \sqrt{\frac{8790 - 8100}{210}}$$

$$s = \sqrt{\frac{690}{210}} = \sqrt{3{,}2857} = \underline{1{,}8}$$

Það sést á þessum tveimur síðustu sýnidæmum að svörin eru ekki alveg eins. Meðalfrávikið er 1,5 og staðalfrávikið = 1,8. Enda eru formúlurnar ekki að vinna alveg eins. Svo þetta verður að teljast ásættanlegar niðurstöður.

Lítum þá loks á hvernig má finna staðalfrávik í bilskiptri tíðnitöflu. Leyndardómurinn er sá sami og við að finna meðaltal í bilskiptri tíðnitöflu. Þá þarft þú að finna miðpunktinn fyrir hvert bil = x. Formúlan er sú sama. Sama formúla er notuð til þess að finna staðalfrávik í tíðnitöflu og bilskiptri tíðnitöflu:

$$s = \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}}$$

Dæmi:

Finndu staðalfrávikið í þessari bilskiptu tíðnitöflu:

Bil = x	Miðp. = x	Tíðni = f	f·x	f·x^2
1 - 5	3	2	6	$2{\cdot}3^2 = 18$
6 - 10	8	4	32	$4{\cdot}8^2 = 256$
11 - 15	13	3	39	$3{\cdot}13^2 = 507$
16 - 20	18	5	90	$5{\cdot}18^2 = 1620$
21 - 25	23	4	92	$4{\cdot}23^2 = 2116$
26 - 30	28	2	56	$2{\cdot}28^2 = 1568$
31 - 35	33	3	99	$3{\cdot}33^2 = 3267$
36 - 40	38	2	76	$2{\cdot}38^2 = 2888$
		N = 25	$\sum fx^2 = 490$	$\sum fx^2 = 12240$

$$s = \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{25{\cdot}12240 - 490^2}{25(25-1)}} =$$

$$s = \sqrt{\frac{306000-240100}{600}} = \sqrt{\frac{65900}{600}} = \sqrt{109{,}83} = \underline{10{,}48}$$

Ef þú skoðar bilskiptu tíðnitöfluna í dæminu sérðu að dreifingin nær frá 1 til 40, miðjan er í 20 og þá dreifast frávikin 20 einingar í báðar áttir og miðjan á 20 = 10. Staðalfrávikið í dæminu var 10,48 svo mjög líklegt er að það sé rétt.

13.1.8 Frávikshlutfall

Hlutfall er deiling og sú sem notuð er í líkindareikningi er: % = h / H

% = prósenta af 100
h = hluti.
H = heild

Frávikshlutfall er prósentureikningur á dreifingu frávikanna frá miðju sem er gott að nota t.d. ef meðaltölin og staðalfrávikin eru ekki hin sömu.

Frávikshlutfallið hefur formúluna:

v = $\frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$
v = frávikshlutfall
s = staðalfrávik = hluti.
$\bar{x}$ **= meðaltalið = heild**
100 = grunntalan í prósentureikningi

Dæmi:

Hvort er meira fráviksshlutfall (launabil) á Íslandi eða í Evrópusambandsríkjunum ef laun verkamanna eru sem hér segir:

Ísland: $\bar{x}$ = Meðallaun = 1400 kr. s = Staðalfrávik = 200 kr.	Evrópusambandið: $\bar{x}$ = Meðallaun = 30 evrur. s = Staðalfrávik = 8 evrur.
Ísland: v = $\frac{200}{1400} \cdot 100 = \underline{14{,}3\%}$	Evrópusambandið: v = $\frac{8}{30} \cdot 100 = \underline{26{,}6\%}$

Það er meira launabil í Evrópusambandinu.

13.1.9 Miðgildi

Miðgildi er gegnsætt hugtak og auðvelt er að finna miðgildi í talnadreifingu. Ef fjöldi talnanna er oddatala er það einfaldlega talan í miðjunni eftir að tölunum hefur verið raðað í stærðarröð.

Dæmi:

Hvert er miðgildi eftirfarandi talnaraðar:

6, 3, 4, 8, 7, 9, 5

Raðað í stærðarröð: 3, 4, 5, <u>6</u>, 7, 8, 9

Miðgildið er = 6 = Talan í miðjunni.

Ef fjöldi í talnasafni er slétt tala þá er miðgildið meðaltal talnanna tveggja sem lenda í miðjunni.

Dæmi:

Hvert er miðgildi eftirfarandi talnaraðar:

6, 2, 4, 3, 8, 7, 9, 5

Raðað í stærðarröð: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Þá eru í raun tvö miðgildi = 5 og 6. Finna þarf meðaltalið:

$\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = \underline{5,5}$ Miðgildið er 5,5

13.1.10 Miðgildi í bilskiptri tíðnitöflu

Það að finna miðgildi í bilskiptri tíðnitöflu er ekki jafn gegnsætt og að finna miðgildi í talnasafni. Reikna þarf það út með sérstakri formúlu.

Miðgildi = $L + \frac{k}{f_m} \cdot c$

L = neðri mörk þess bils sem miðgildið er á

k = hlutinn sem farið er inná á bilinu til þess að komast að miðgildinu

f_m = heildin = fjöldinn sem er á bilinu sem miðgildið er á

c = billengdin

Miðgildisformúlan er í raun prósentuformúlan.

$\% = \frac{h}{H} = \frac{k}{f_m} = \frac{Hlutinn}{Heildin}$

Miðgildið er fundið með því að prósentureikna sig upp að miðgildinu. Skoðum nú sýnidæmi um miðgildi í bilskiptri tíðnitöflu.

Dæmi:

Finndu miðgildið í bilskiptri tíðnitöflu sem sýnir þyngd 50 framhaldsskólanema.

Þyngd kg.	Tíðni f	Samanlögð tíðni
60 - 64	5	5
65 - 69	3	8
70 - 74	6	14
75 - 79	8	22
80 - 84	8	30
85 - 89	6	
90 - 94	6	
95 - 99	8	

Finna þarf miðjuna í dreifingunni. 50 / 2 = 25

Finna þarf dálkinn sem miðgildið er í = 5 dálkur.

$$\text{Miðgildi} = L + \frac{k}{f_m} \cdot c$$

L = Neðri mörk bilsins = 79,5

k = hlutinn = 3. Hvað þú þarft að fara langt upp að miðju

f_m = Heildin á bilinu = 8

c = Billengdin = 5

Miðgildið = 0 79,5 + $\frac{3}{8} \cdot 5$ = 79,5 + 1,875 = 81,375

Þegar þú finnur dálkinn sem miðgildið er í = 80 – 84 dálkurinn þá sérðu að allar upplýsingarnar eru í þeim dálki.

L = Neðri mörk bilsins eru 80, en til þess að vera ögn nákvæmari, þarf að byrja í $\frac{79+80}{2}$ = <u>79,5</u>

k = er hlutinn, sem þú þarft að fara inn á bilið til þess að komast að miðjunni. Þú ert kominn með 22 við bilið en þarft 3 til viðbótar til þess að komast að 25 $\rightarrow$ 25 -22 = 3

k = <u>3</u>

f_m = eru allar mælingarnar á bilinu. Alls 8. f_m = <u>8</u>

c = Billengdin 80, 81, 82, 83, 84 eða 5 mælitölur. c = <u>5</u>

13.1.11 Prósentutöflur

Stóra spurningin í prósentureikningi er auðvitað: hver er heildin? Það getur verið flókin spurning þegar heildirnar geta verið tvær, eins og í dæmunum hér á eftir, þegar fyrst er túlkað eftir kyni og síðan er sama tafla túlkuð eftir skoðun.

Eftirfarandi prósentutafla lýsir skoðunum karla og kvenna á göngubrú yfir Bústaðaveg í Reykjavík.

	Konur	Karlar	Alls
Með	200	100	300
Á móti	400	500	900
Hlutlaus	100	200	300
Alls	700	800	

Túlkum þessa töflu á tvo vegu: eftir kyni og eftir skoðun.

Dæmi:

Túlkaðu töfluna hér á undan sem prósentur fyrir kyn.

	Konur	Karlar
Með	200 / 700 = 28,6%	100 / 800 = 12,5%
Móti	400 / 700 = 57,1%	500 / 800 = 62,5%
Hlutlaus	100 / 700 = 14,3%	200 / 800 = 25%
Alls	700 / 700 = 100%	800 / 800 = 100%

Ef þú leggur saman dálkinn konur þá færð þú 100% = heildin fyrir konur.

Ef þú leggur saman dálkinn karlar færðu 100% fyrir karla

Hægt er að túlka þessa sömu prósentutöflu fyrir skoðun. Skoðum nú sýnidæmi um það.

Dæmi:

Túlkaðu nú töfluna hér að framan fyrir skoðanir.

	Konur	Karlar	Alls
Með	200 / 300 = 66,7%	100 / 300 = 33,3%	100%
Á móti	400 / 900 = 44,4%	500 / 900 = 55,6%	100%
Hlutlaus	100 / 300 = 33,3%	200 / 300 = 66,7%	100%

Ef þú leggur saman dálkinn: Með Þá færð þú út 100%. Ef þú leggur saman dálkinn: Á móti færð þú út 100%. Einnig ef þú leggur saman dálkinn: Hlutlaus

Ljóst er að hægt er að túlka þessa töflu sem prósentur bæði fyrir kyn og skoðun.

13.1.12 Myndrit

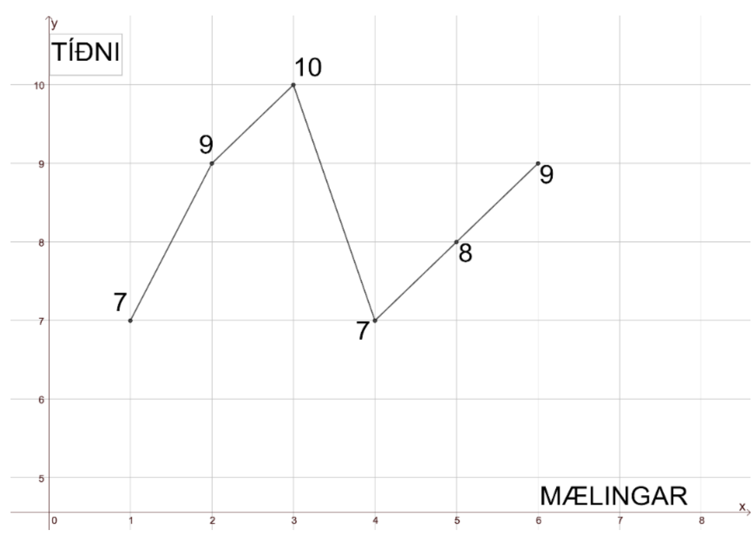
Teningi er kastað 50 sinnum og niðurstöðurnar túlkaðar í eftirfarandi tíðnitöflu. Síðan verður þessi tíðnitafla túlkuð með myndritum á nokkra vegu: með línuriti, stöplariti, súluriti og skífuriti.

x	Tíðni = f
1	7
2	9
3	10
4	7
5	8
6	9
	N = 50

Að túlka tölur og töflur í myndriti getur oft verið betra og gefið gleggri mynd af upplýsingum.

Byrjum á að túlka þessar niðurstöður í línuriti.

Sýnidæmi:



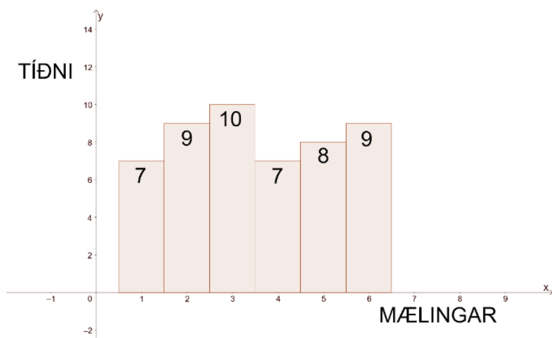
Glögglega sést hvaða tala er hæst, kemur oftast fyrir, hver er lægst og kemur sjaldnast fyrir.

13.1.12.1 Stöplarit og súlurit

Stöplarit og súlurit eru keimlík fyrirbæri. Í stöplariti eru stöplarnir samfastir en í súluriti er bil á milli súlnanna, þær eru aðskildar.

Dæmi:

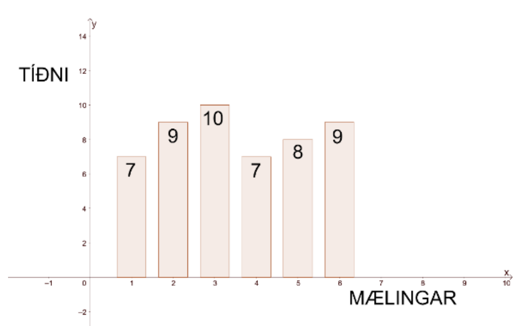
Sýndu í stöplariti dreifinguna á teningaköstunum 50.



Ef til vill gefur stöplaritið betri mynd af þessari tíðnitöflu og dreifing heldur en línuritið. Best er auðvitað að velja myndrit sem lýsir dreifingunni best.

Dæmi:

Súlurit með sömu upplýsingum



13.1.12.2 Skífurit

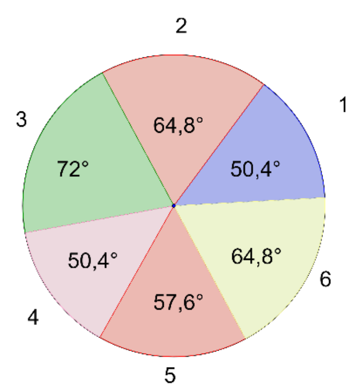
Í skífuriti, (hringriti) eru upplýsingarnar settar fram í prósentum = gráðum í hring. Hringurinn er 360° og þar af leiðandi er 1% = 360 / 100 = 3,6°.

Dæmi:

Búðu til skífurit yfir teningaköstin 50 hér að framan

x	Tíðni f	Prósentur	Gráður
1	7	7 / 50 = 14%	360°·0,14 = 50,4°
2	9	9 / 50 = 18%	360°·0,18 = 64,8°
3	10	10 / 50 = 20%	360°·0,20 = 72,0°
4	7	7 / 50 = 14%	360°·0,14 = 50,4°
5	8	8 / 50 = 16%	360°·0,16 = 57,6°
6	9	9 / 50 = 18%	360°·0,18 = 64,8°
	N = 50	Alls: 100%	Alls: = 360°

Nú er að teikna skífuritið. Gott er að nota gráðuboga

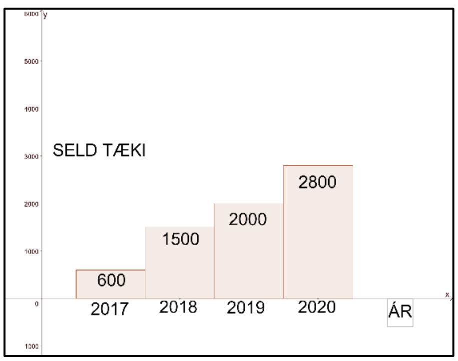


13.1.12.3 Túlkun myndrita

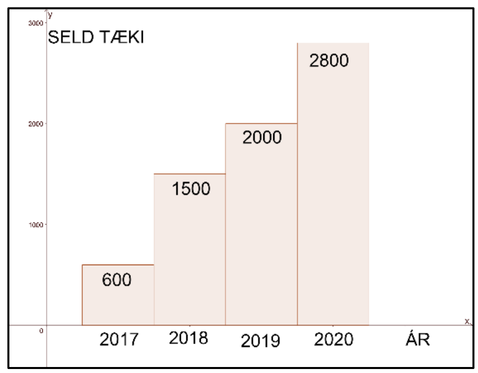
Að túlka tölur með myndritum er vandasöm iðja og þó nokkur atriði sem vert er að skoða. Ef ég væri markaðsstjóri og væri að kynna sölutölur fyrirtækisins með myndriti gæti ég náð fram mismunandi áhrifum eftir framsetningu.

Dæmi:

Sala eftir árum sýnd með stöplariti

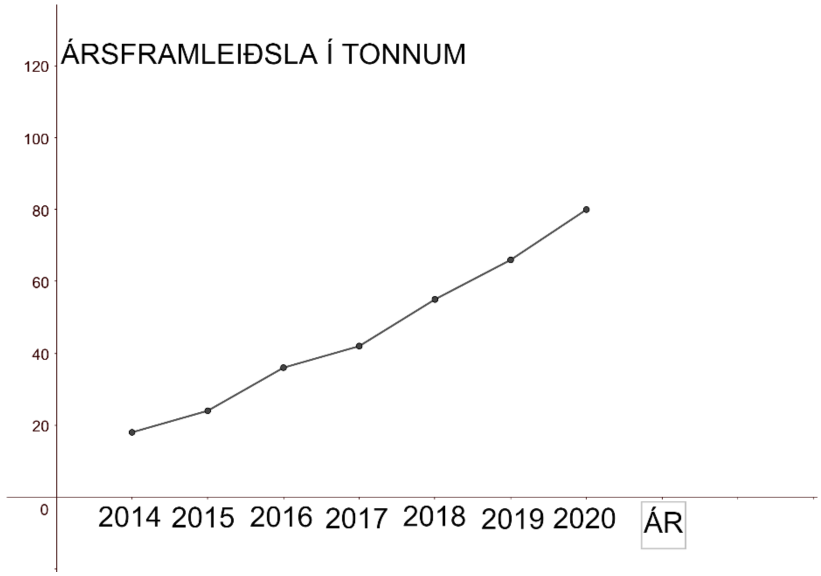


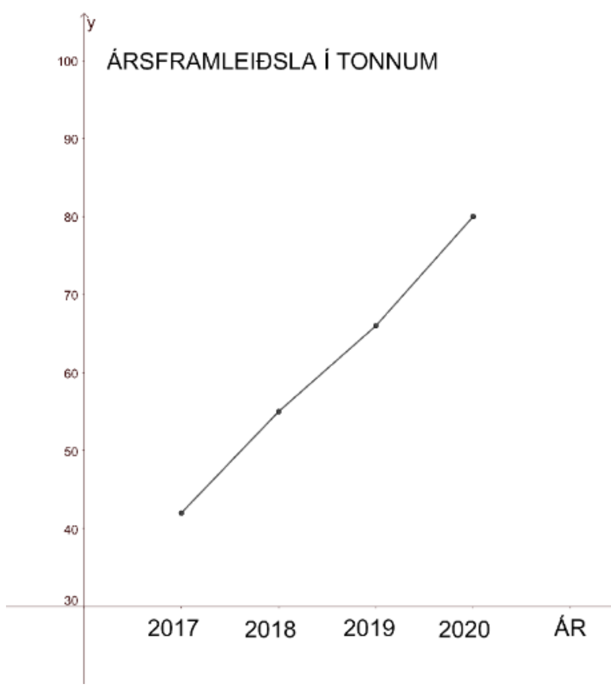
Aðeins lengri söluás



Til eru ýmis brögð til þess að láta tölulegar upplýsingar líta mismunandi út. Því þarf að vanda framsetningu og túlkun gagnanna. Sjá nokkur fleiri dæmi hér á eftir.

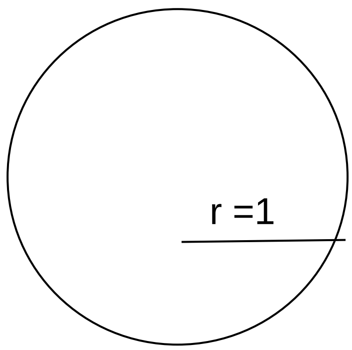
Dæmi:

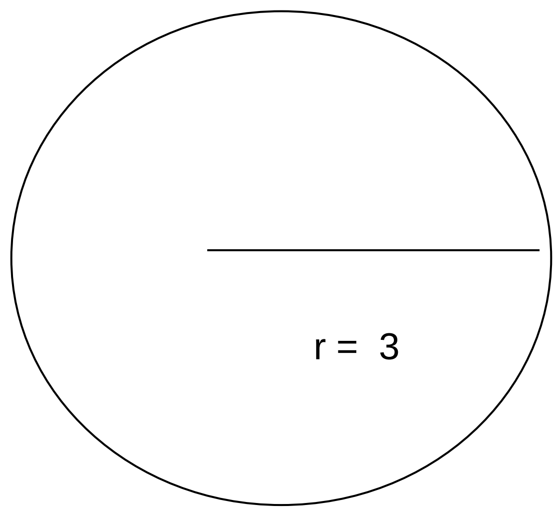

ÁRSFRAMLEIÐSLA Í TONNUM
120
100
80
60
40
20
0
2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020
ÁR


y
ÁRSFRAMLEIÐSLA Í TONNUM
100
90
80
70
60
50
40
30
2017
2018
2019
2020
ÁR

Dæmi:

Framleiðsla fyrirtækis þrefaldaðist á einum áratug. Það er sýnt með skífuritum á eftirfarandi hátt:





Þó að radíusinn þrefaldist, sem á að túlka sem þreföldun á framleiðslunni, þá nífaldast flatarmálið og á þann máta eru myndirnar villandi.

Flatarmál hrings = radíus^2 · pí

F = 1^2 · 3,14 = <u>3,14</u>

F = 3^2 · 3,14 = <u>28,26</u>

28,26 / 3,14 = 9 Stærri hringurinn er nífalt stærri.

Myndrit eru gott tæki til þess að túlka talnasöfn og tíðnidreifingu. Með myndriti fæst oft gleggri mynd af talnadreifingu. Þú opnar varla dagblað í dag nema fyrir komi tölfræðileg túlkun á einhverju formi: töflur eða myndrit. Myndrit er öflugt form til þess að túlka tölfræðilegar upplýsingar. Athuga verður vel og vanda vel framsetningu alla eins og sést í dæmunum hér að framan. Það er hægt að túlka, ýkja eða draga úr áhrifum með framsetningu. Þannig að ljóst er að við verðum að vanda okkur vel þegar við túlkum og lesum tölfræðilegar niðurstöður.

13.2 Talningafræði

Til er saga um ættbálkinn í frumskóginum sem taldi; einn tveir og margir. Með aukinni tækni hefur þörfin fyrir meiri nákvæmni í talningum vaxið. Hér verða kynntar fjórar aðferðir talningafræðinnar:

Margföldunarreglan

Hrópmerkt = x!

Uppstokkanir - permutations = nPr.

Samantektir – combinations = nCr = $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ **= ritmál.**

13.2.1 Margföldunarreglan

Endurteknar líkur eru margfeldi.

Þannig hljómar margföldunarreglan. Ef þú endurtekur atburðinn oftar en einu sinni er um endurtekningu að ræða.

Dæmi:

Hverjar eru líkurnar á að fá sexu tvisvar í röð ef þú kastar teningi tvisvar sinnum?

P(sex) = líkurnar á að fá sex = $\frac{1}{6}$

Líkurnr á að fá tvær sexur í röð eru:

P (sex,sex) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Skoðum annað dæmi um margföldunarregluna.

Dæmi:

Þú kaupir gervihnattadisk og nærð sendingum frá sex löndum og getur horft á fjórar stöðvar frá hverju landi. Hvað getur þú horft á margar stöðvar?

Alls 6 · 4 = <u>24 stöðvar.</u>

Tökum loks flóknara dæmi um val og valmöguleika.

Dæmi:

Þú ferð inn á Hamborgaragrillið og ætlar að fá þér máltíð. Þú getur valið um sex tegundir hamborgara, fjórar tegundir af meðlæti, átta tegundir af drykk með matnum og loks er hægt að fá fimm tegundir af eftirréttum. Hve margar mismunandi samsettar máltíðir er hægt að panta á þessum veitingastað?

$6\cdot 4\cdot 8\cdot 5$ = 960 mismunandi máltíðir.

13.2.2 Hrópmerkt = x!

Hrópmerkt er afbrigði af margföldunarreglunni. Hrópmerkt hefur sinn eiginn takka x! á reiknivélinni. Athugið að hann getur verið staðsettur á neðra borði reiknivélarinnar. Þá þarf að ýta á SHIFT- takkann.

Skoðum nú sýnidæmi um hrópmerkt.

Dæmi:

Á hve marga vegu er hægt að raða skóm í skóskáp með fjórum hillum ef eitt par á að vera í hverri hillu.

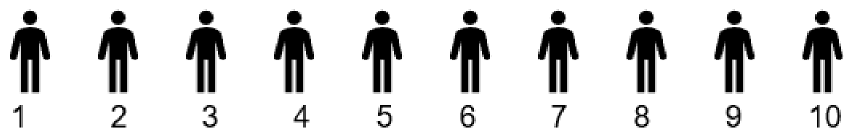
Hilla 1	Fyrsta parið á 4 möguleika
Hilla 2	Annað parið á 3 möguleika
Hilla 3	Þriðja parið á 2 möguleika
Hilla 4	Fjórða parið á 1 möguleika

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ = 24   eða á reiknivélinni: 4x! = 24

Hrópmerkt er notað til þess að reikna möguleika á að raða í röð.

Dæmi:

Á hve marga vegu er hægt að raða 10 manns í röð?



Fyrsti getur valið um 10 sæti

Annar getur valið um 9 sæti

Þriðji getur valið um 8 sæti

Fjórði getur valið um 7 sæti

Fimmti getur valið um 6 sæti

Sjötti getur valið um 5 sæti

Sjöundi getur valið um 4 sæti

Áttundi getur valið um 3 sæti

Níundi getur valið um 2 sæti

Tíundi getur valið um 1 sæti

Eða $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 3628800 mismunandi raðir

Með reiknivélinni 10 x! = 3628800

13.2.3 Uppstokkanir - permirations = nPr

Það að telja á hve marga vegu er hægt að mynda lítinn hóp = myndmengi = (r) út úr stærri hóp = grunnmengi = (n) heitir uppstokkanir á ensku permutation og á reiknivélinni er sér skipun/takki fyrir uppstokanir = nPr. Einfaldasta uppstokkunin sem jafnframt er gott sýnidæmi um það á hve marga vegu er hægt að velja tvo út úr hóp með þremur. 3P2 á reiknivélinni = 6

Dæmi:

Á hve marga vegu er hægt að velja tvær tölur af þremur?

A B C Grunnmengi = n með þremur.

A B Myndmengin = r með tveimur.

B A

B C

C B

A C

C A

Hægt er að mynda sex mismunandi myndmengi = (r) út úr þessu grunnmengi = (n)

Hér er A B einn möguleiki og B A annar möguleiki.

Röð skiptir máli.

Á reiknivélinni er það 3 nPr 2 = 6

Sums staðar í lífinu skiptir röð máli jafnvel miklu máli t.d. með peninga. Hvort vilt þú eiga?:

19 þúsund krónur eða
91 þúsund krónur?

Hér skiptir all verulegu máli í hvaða röð tölurnar 1 og 9 eru. Í keppni skipta sæti máli. Aðeins einn getur verið í 1.sæti, aðeins einn í 2.sæti og aðeins einn í 3.sæti þótt keppendur séu miklu fleiri.

Dæmi:

Á hve marga vegu er hægt að raða í fyrsta, annað og þriðja sæti í söngvakeppni ef keppendur eru 12.

Á reiknivélinni 12 nPr 3 = <u>1320</u>

13.2.4 Samantektir – combinations = nCr = $\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$

Samantektir eru nokkuð líkar uppstokkunum. Verið er að mynda lítinn hóp = myndmengi = (r) úr stærri hóp = grunnmengi = (n). Til þess er notaður takkinn nCr á reiknivélinni. Tökum einfaldasta dæmið um samantektir.

Dæmi:

Á hve marga vegu er hægt að velja tvo af þremur ef röð skiptir ekki máli.

A B C Grunnmengið = (n) með þremur.

A B Myndmengin = (r) með tveimur.

B A

A C

C A

B C

C B

Hægt er að velja þrjú myndmengi úr þremur ef röð skiptir ekki máli. Þá er: AB = BC, AC = CA og BC = CB. Röð skiptir ekki máli.

Á reiknivélinni er það 3 nCr 2 = <u>3</u>

13.2.5 Samanburður á uppstokkunum nPr og samantektum nCr

Það sem er eins með uppstokkunum nPr og samantektum nCr er að verið er að telja á hve marga vegu er hægt að mynda minni hópa úr stærri hóp. Til að mynda mundu 7P3 og 7C3 telja á hve marga vegu hægt er að mynda þriggja manna hópa úr hópi sjö manna.

7P3 = 210 mismunandi hópa
7C3 = 35 mismunandi hópa

Mismunurinn á nPr og til dæmis nCr er hinsvegar hvort röð skipti máli eða ekki. Þegar þú velur þrjá af sjö, þá getur þú raðað þeim upp á sex vegu:

Dæmi:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	**Grunnmengið = (n)**
1, 2, 3	**Myndmengin sex = (r)**
1, 3, 2	**Ef röð skiptir máli nPr þá eru**
2, 1, 3	**möguleikarnir sex. Ef röð**
2, 3, 1	**skiptir <u>ekki</u> máli þá eru þessir**
3, 1, 2	**sex möguleikar í raun bara einn.**
3, 2, 1	

Þessvegna er nPc alltaf hærra en (fleiri möguleikar) en nCr. Ef þú ert að velja þá notarðu nCr, en ef þú ert að velja og raða þá notarðu nPr.

13.2.6 Ritmál og tölvumál nPr og nCr

Til er hugtak í félagsfræðinni, sem nefnist menningarleg mishröðun og er þar átt við að tæknin breytist oft hraðar, en siðir og venjur í samfélaginu. Gott dæmi um þetta er í uppstokkunum og samantektum þar sem gamla ritmálið mætir tölvutækninni = reiknivélinni. Þetta getur boðið upp á rugling. Skoðum vel þessa töflu:

	Uppstokkanir- Permutations.	Samantektir- Combinations.
Ritmál	P(n,k)	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
Tölvumál Reiknivélin	nPr	nCr

13.3 Líkindi og líkindatré

Líkur á að eitthvað gerist, er í raun hægt að túlka sem prósentur.

% = $\frac{h}{H}$
% = prósenta.
h = hluti.
H = heild = 100%

Formúlan fyrir líkur er í raun prósentuformúlan í nýjum búningi.

P(A) = $\frac{k}{n}$
P(A) = líkurnar á að atburðurinn A gerist
k = hluti
n = Heild = 100%

Á stofnanamáli má túlka formúluna fyrir líkur:

$$P(A) = \frac{Fjöldi\ útkoma\ sem\ koma\ upp}{Mögulegur\ heildarfjöldi = Allir\ möguleikarnir}$$

sem er í raun gamla prósentuformúlan:

$$\% = \frac{h}{H}$$

Dæmi:

Hverjar eru líkurnar á að fá þorsk þegar krónupeningi er kastað?

Þ J Úrtaksrýmið: þorskur + jötunninn úr skjaldarmerkinu

= 0,5 + 0,5 = 1,00

P(Þ) = Líkur á að fá þorsk = $\frac{1}{2}$ = <u>0,5 = 50%</u>

P(J) = Líkur á að fá jötunn = $\frac{1}{2}$ = <u>0,5 = 50%</u>

Dæmi:

Hverjar eru líkurnar á að fá 6 þegar teningi er kastað?

Það eru 6 hliðar á teningi og líkurnar á að fá 6 = P(6) = $\frac{1}{6}$ = <u>0,1667 = 16,67%</u>

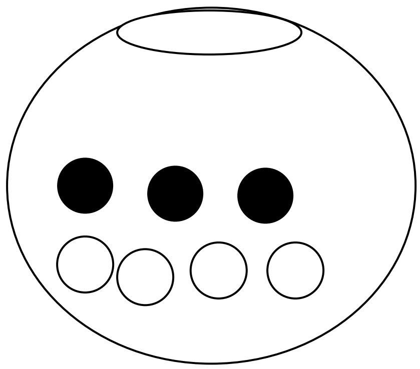
P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = $\frac{1}{6}$

Úrtaksrýmið = Heildin = 100% = Allir möguleikarnir.

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}$ = <u>1,00 = 100%</u>

Dæmi:

Í skál eru 3 svartar kúlur og 4 hvitar kúlur.



Hverjar eru líkurnar á að draga:

-hvíta kúlu?

-svarta kúlu.

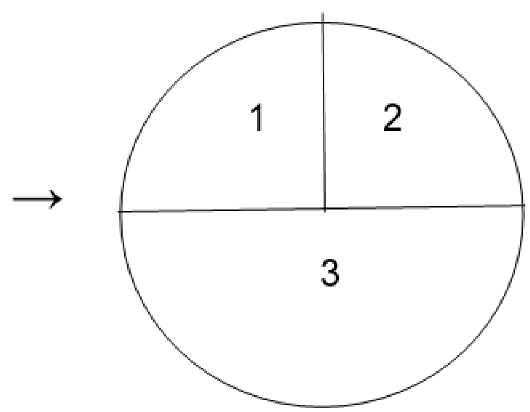
-Svarta kúlu = P(S) = $\frac{3}{7}$

-Hvíta kúlu = P(H) = $\frac{4}{7}$

Úrtaksrýmið = $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{7}{7} = \underline{1{,}00 = 100\%}$

Dæmi:

Hverjar eru líkurnar á að fá 1, 2 eða 3 á lukkuhjólinu?



P(1) = $\frac{1}{4}$ = <u>0,25 = 25%</u>

P(2) = $\frac{1}{4}$ = <u>0,25 = 25%</u>

P(3) = $\frac{1}{2}$ = <u>0,50 = 50%</u>

Úrtaksrýmið er = Allir möguleikarnir = Heildin = 100%

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4}{4}$ = <u>1,00 = 100%</u>

13.3.1 Úrtaksrýmið

Úrtaksrýmið er allir möguleikarnir. Til dæmis er úrtaksrýmið 6 möguleikar þegar teningi er kastað. 1, 2, 3, 4, 5, 6 og heildar líkurnar eru því:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6} = \underline{1{,}00 = 100\%}$$

Líkurnar á að fá 7 þegar teningi er kastað eru ekki inni í úrtaksrýminu og því engar líkur á að fá 7. P(7) = <u>0</u>. Úrtaksrýmið þegar tveimur teningum er kastað inniheldur 36 möguleika og lítur svona út:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Þegar búið er að teikna upp úrtaksrýmið fyrir tvo teninga er mjög auðvelt að reikna (telja út) líkurnar.

Dæmi:

Líkurnar á að fá 2 = $\frac{1}{36}$

Líkurnar á að fá 5 = $\frac{4}{36}$ = $\frac{1}{9}$

Líkurnar á að fá par = tvo eins = $\frac{6}{36}$ = $\frac{1}{6}$

Líkurnar á að fá slétta tölu = $\frac{18}{36}$ = $\frac{1}{2}$

13.3.2 Ósamræmanlegar líkur

Ósamræmanlegar líkur eru þegar líkur ganga ekki upp. Eitthvað sem er ósamræmanlegt = ekki hægt að gera.

Dæmi:

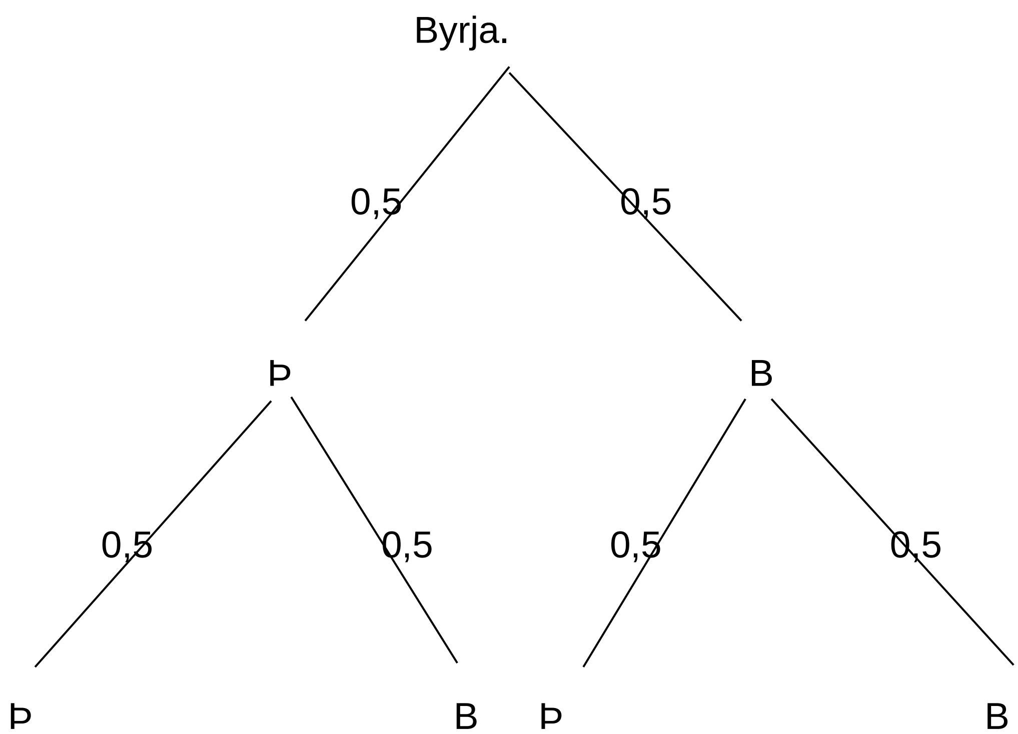
Þegar tveimur teningum er kastað. Hverjar eru líkurnar á að fá oddatölu og fá samtals 4?

Það er ósamræmanlegt. Útkoman getur ekki verið oddatala því 4 er ekki oddatala. Sjá úrtaksrýmið hér fyrir framan

13.3.3 Líkindatré

Líkindatré eru skrítnar plöntur en lúta frekar einföldum reglum þegar betur er að gáð. Reglur sem byggjast á samlagningu og margföldun brota. Skoðum líkindatré sem lýsir líkunum við að kasta krónupeningi tvisvar. Líkindatréð verður á tveimur hæðum. Á efri hæðinni eru líkindin af fyrsta kastinu og á neðri hæðinni eru líkurnar úr seinna kastinu. Skoðum líkindatré sem sýnir líkur á að fá þorsk og bergrisa þegar krónupeningi er kastað. P(Þ) = 0,5 og P(B) = 0,5

Dæmi:

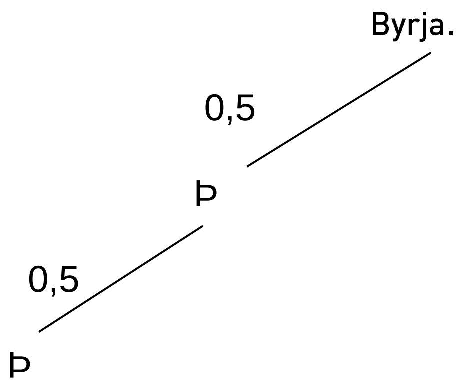


ÞÞ ÞB BÞ BB

0,5·0,5=0,25 0,5·0,5=0,25 0,5·0,5=0,25 0,5·0,5=0.25

0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 = <u>1,00 = 100%</u>

Þegar þú ferð niður greinina í líkindatrénu gildir margföldunarregla: „endurteknar líkur eru margfeldi", þannig margfaldar þú saman líkurnar.



Þá eru líkurnar á að fá þorsk

tvisvar í röð 0,5 · 0,5 = 0,25

Margföldunarreglan gildir:

Endurteknar líkur er: margfeldi

Þegar þú ert kominn með allar niðurstöðutölurnar í úrtaksrýminu þá notarðu samlagningarregluna og leggur saman mismunandi líkur.

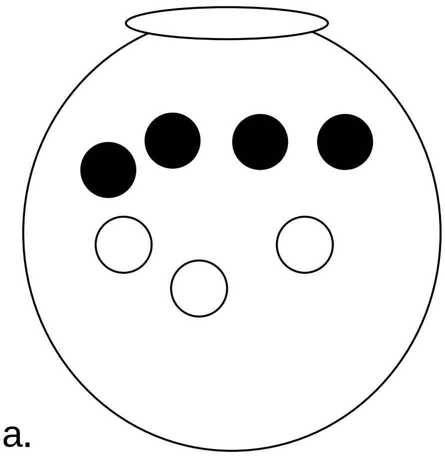
Þ Þ	Þ B	S B	B B
0,25 +	0,25 +	0,25 +	0,25

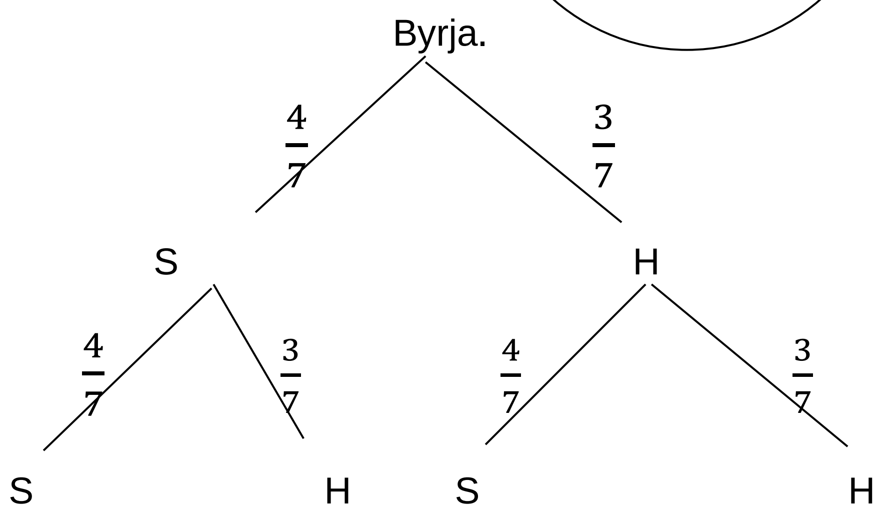
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = \underline{1{,}00 = 100\%}$$

Ef úrtaksrýmið verður ekki 1,00 = 100% þá er villa einhversstaðar.

Skoðum því næst líkindatré þar sem þú dregur svartar og hvítar kúlur tvisvar í röð úr sama poka. Atburðirnir eru þá kallaðir: „óháðir“. Þú dregur kúlu úr pokanum og setur hana aftur í pokann og í seinna skiptið er um sama fjölda að ræða og líkurnar þær sömu.

Dæmi: Teiknaðu líkindatré og reiknaðu líkurnar, þegar þú dregur kúlu úr skál með þremur hvítum kúlum og fjórum svörtum kúlum og setur hana aftur í skálina = óháður atburður.





Úrtaksrýmið er = allir atburðirnir.

S S   S H   H S   H H

$\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$ $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$ $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$ $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$\frac{16}{49} + \frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{9}{49} = \frac{49}{49}$ = <u>1,00 = 100%</u> $\longrightarrow$

Dæmi framhald:

Ef úrtaksrýmið er = 1,00 = 100% þá eru miklar líkur á að líkindatréð sé rétt.

Örlítið meira um samlagningarregluna. Þegar búið er að teikna upp og reikna úrtaksrýmið þá er hægt að nota samlagningarregluna til þess að rekna út ýmsa möguleika.

Úrtaksrýmið:

S S	S H	H S	H H
$\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$	$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$	$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$	$\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

Nú er hægt að reikna líkur á að fá:

-eins á litin: SS og HH = $\frac{16}{49} + \frac{9}{49} = \frac{25}{49}$

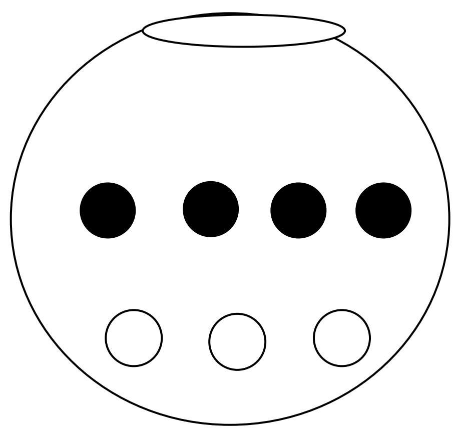
-ekki eins á litinn: SH og HS = $\frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$

-alla nema: SS = SH + HS + HH = $\frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{9}{49} = \frac{33}{49}$

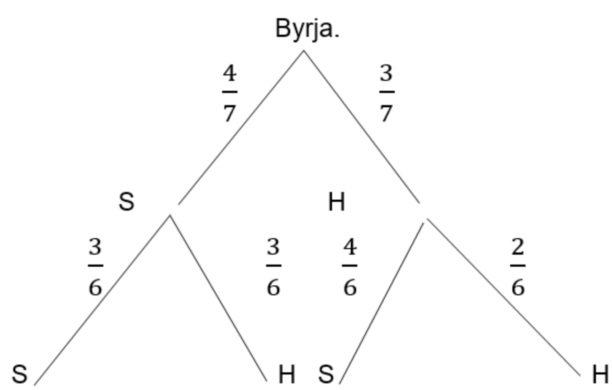
Skoðum nú líkindatré þar sem seinni atburðurinn er: „háður" því sem gerist í fyrri atburðinum. Þú ert með skál með þremur hvítum kúlum og fjórum svörtum kúlum. Nú dregur þú í fyrra skiptið og borðar kúluna. Þá þegar þú dregur í seinna skiptið þá hefur bæði hlutinn og heildin breyst. Að því leyti er seinni atburðurinn háður þeim fyrri.

Dæmi:

Teiknaðu líkindartré og reiknaðu líkurnar þegar þú degur kúlu úr skál með þremur hvítum kúlum og fjórum svörtum kúlum og þú setur kúluna ekki aftur í skálina og svo dregur þú aftur.



Mundu að atburðirinn er háður.



→

Dæmi framhald:

Úrtaksrýmið = Allir möguleikarnir

S S S H H S H H

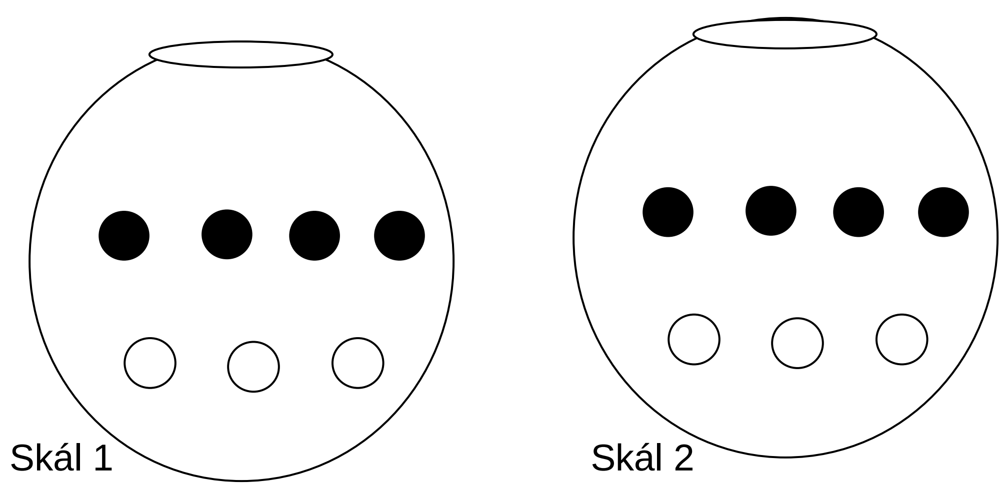
$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} \qquad \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} \qquad \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42} \qquad \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

$$\frac{12}{42} + \frac{12}{42} + \frac{12}{42} + \frac{6}{42} = \frac{42}{42} = \underline{1{,}00 = 100\%}$$

Úrtaksrýmið er 1,00 = 100% Þá er líkindatréið rétt.

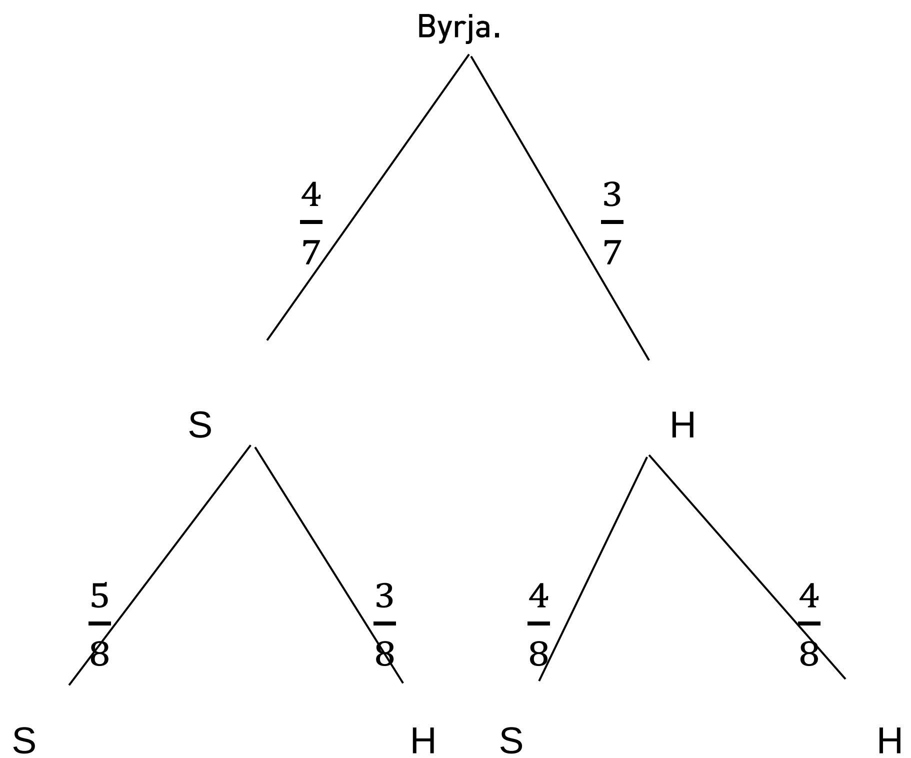
Skoðum loks dæmi um líkindatré þar sem seinni atburðurinn er háður þeim fyrri, á þann hátt, að þú tekur eina kúlu úr skál nr. 1 og setur í skál nr. 2 og draga svo.

Dæmi: Teiknaðu líkindatré þar sem þú dregur fyrst kúlu úr skál nr. 1 og setur hana í skál nr. 2 og dregur svo kúlu úr skál nr. 1



→

Dæmi framhald:



S S

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{20}{56}$$

S H

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{56}$$

H S

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{8} = \frac{12}{56}$$

H H

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{8} = \frac{12}{56}$$

Úrtaksrýmið = Allir möguleikar.

$$\frac{20}{56} + \frac{12}{56} + \frac{12}{56} + \frac{12}{56} = \frac{56}{56} = \underline{1{,}00 = 100\%}$$

Líkindatréð er því rétt.

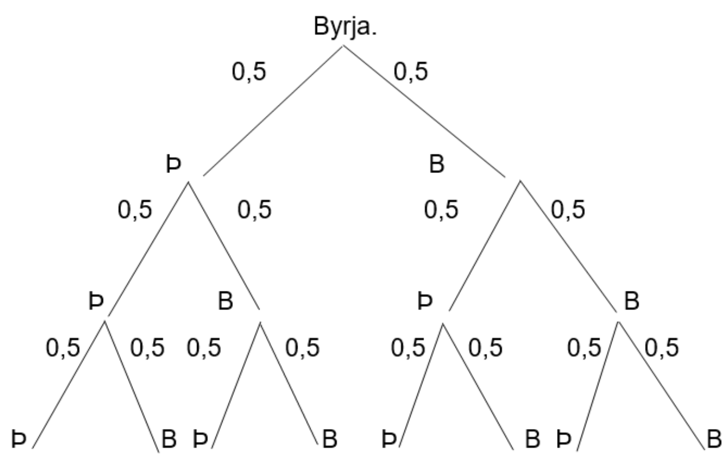
Skoðum nú loks líkindatré á þremur hæðum sem lýsir því þegar krónupeningi er kastað þrisvar. Líkindatré á þremur hæðum er í raun alveg eins og á tveimur hæðum nema einni hæð stærri eða lengri.

Líkur á þorski = P(Þ) = $\frac{1}{2}$ = 0,5

Líkur á bergrisa = P(B) = $\frac{1}{2}$ = 0,5

Dæmi:

Teiknaðu líkindatré sem lýsir því þegar krónupeningi er kastað þrisvar sinnum og reiknaðu út líkurnar.



Hver grein = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

ÞÞÞ ÞÞS ÞSÞ ÞSS SÞÞ SÞS SSÞ SSS

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} =$ 1,00 = 100%

Þetta er því rétt

13.3.4 Meira um líkur

Við höfum nú skoðað undirstöðuatriði fyrir líkindareikning. Við höfum séð tengslin á milli:

Líkinda = P = $\frac{k}{f_m}$ og prósentu = % = $\frac{h}{H}$

þar sem hægt er að túlka líkur = prósentur. Tvær spurningar skjóta þá upp kollinum:

Hver er hlutinn?

Hver er heildin?

Þetta þarf að skoða mjög vel þegar talað er um: „skilyrtar líkur", þ.e. þegar það er háð skilyrðum hvaða tala er hlutinn, og hvaða tala er heildin?

Dæmi upplýsingar:

Gefin er tafla með níu tölum.

	Dökkhærður	Ljóshærður	Alls:
Rétthentur	120	80	200
Örvhentur	30	20	50
Alls:	150	100	250

Svörum nú spurningunum á næstu blaðsíðu

Dæmi útreikningar: Hverjar eru líkurnar á að valinn sé rétthentur einstaklingur, gefið er að hann sé dökkhærður.

Þetta þýðir að dökkhærðir séu heildin = 150 og að rétthentir séu hlutinn. Með öðrum orðum: Hve margir af þeim dökkhærðu eru rétthentir?

P(R / D) = 120 / 150 = 12 / 15 = 4 / 5 = <u>0,80 = 80%</u>

Hverjar eru líkurnar á að velja örvhentan ef gefið er að hann sé ljóshærður?

Þetta þýðir að ljóshærðir eru heildin og örvhentir séu hlutinn = 20 eða hve margir af þeim ljóshærðu eru örvhentir?

P(Ö / L) = 20 / 100 = 2 / 10 = 1 / 5 = <u>0,20 = 20%</u>

Í þessu dæmi er gefin tafla með níu tölum. Hver þeirra er hlutinn og hver er heildin? Skoðum nú hugtakið „hlutfall“ sem það þýðir jú deiling,

Hlutfallið á milli a og b þýðir $= \frac{a}{b}$

þar sem fyrri talan kemur upp á strik og sú síðari undir strik. Segja má að þetta sé meira málfræðiregla en stærðfræðiregla.

Prósent er = % = $\frac{h}{H}$

Hlutinn er uppi á striki og kemur fyrir fyrst í upptalningunni en heildin kemur undir strik og er því seinni í upptalningunni. Því má segja:

Táknskriftin P(h / H) = $\frac{h}{H}$ = %

13.3.5 Tvíliðaformúlan

Tvíliðaformúlan gerir eins og nafnið bendir til reiknar út tvo liði, tvílíkur: líkur á að tvennt gerist í einu. Hún lítur svona út:

$$P = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Við skulum nú glósa tvíliðaformúluna:

Stóra P = tvílíkur = líkur á að tvennt gerist í einu

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ **= nCr = samantektir = combinations**

Litla p = líkur

q = ekki líkur

n = heild = allir möguleikarnir

k = hluti

Líkurnar p og ekki líkurnar q verða alltaf að mynda úrtaksrýmið eða heildina, alla möguleikana en heildin er alltaf 1,00 = 100% þannig að p + q = 1,00 = 100%

Dæmi:

a. Hvað eru miklar líkur á að strætó komi ekki á réttum tíma ef það eru p = 0,75 líkur á að strætó komi á réttum tíma?

p = Líkur + q = Ekki líkur eru = 100%

1,00 – p = q   þá er   1,00 – 0,75 = <u>0,25 = 25 %</u>

b. Það eru $\frac{1}{6}$ líkur á að fá sex þegar tening er kastað.

Hverjar eru þá líkurnar á að fá ekki sex?

p + q = 1,00 = 100%

1,00 – p = q   þá er   1,00 - $\frac{1}{6}$ = $\frac{5}{6}$

Skoðum nú dæmi um notkun tvíliðaformúlunnar:

Dæmi:

Krónupeningi er kastað sjö sinnum, hverjar eru líkurnar á að fá þorsk í nákvæmlega þrjú skipti?

p = fá þorsk = $\frac{1}{2}$

q = fá bergrisa = $\frac{1}{2}$

n = 7 = öll köstin = heild

k = 3 = hlutinn = þau köst sem gefa þorsk

$P = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

$P = 7C3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 35 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{35}{128}$ = <u>0,2734 = 27,23 %</u>

Skoðum nú annað dæmi um notkun tvíliðaformúlunna.

Dæmi:

Hverjar eru líkurnar á því að þú giskir alfarið á rétt svar í krossaprófi? Ef prófið er 6 spurningar og þú þarft að fá nákvæmlega 2 spurningar réttar. Þrír svarmöguleikar eru við hverri spurningu.

P = $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot p^k \cdot q^{n-1}$

P = $\frac{1}{3}$ q = $\frac{2}{3}$ n = 6 k = 2

P = 6C2 $\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{243}$ = <u>0,3292 = 32,92%</u>

Svarið er 32,92% líkur á því að fá nákvæmlega tvö rétt svör við sex spurningum. Þá er 100% - 32.92% = 67,08% líkur á að fá alla hina möguleikana til samans.

Það er að fá 1 af 6

3 af 6

4 af 6

5 af 6

6 af 6 möguleikum réttum

Þannig má segja að ef þú veist líkurnar má líka segja að þú vitir ekki líkurnar því p + q = 100% samtals.

Það er oft truflandi í tölfræðinámi hvað táknin og formúlurnar eru stórar og frekar ljótar og framandi. Tvíliðaformúlan er ekki beint falleg eða aðlaðandi.

$$P = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Þar er samt bara um að ræða einfalda innsetningu á fimm tölum: p, q, n, k og $\left[\frac{n}{k}\right]$ inn í formúluna og þegar það er komið, þarf bara að margfalda saman þrjár tölur sem á ekki að vera erfitt á tölvuöld. Ef til vill er erfiðast að lesa út úr texta dæmisins hvaða tala er hvað en það kemur fljótt með endurteknum lestri.

13.4 Fylgni

Segja má að fylgni sé líkindi á bilinu -100% til +100% eða frá -1,00 til +1,00 þar sem:

Fylgnisamband

-1,00 er 100% neikvæð fylgni

+1,00 er 100% jákvæð fylgni

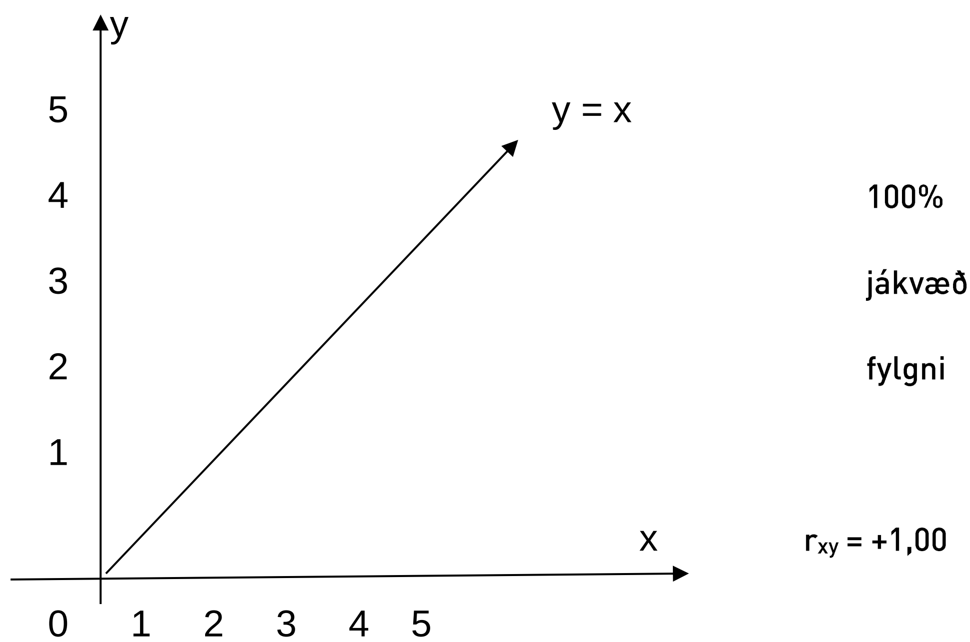
og 0,0 sé engin fylgni

Ég hef oft tekið dæmi um líkurnar á milli þess að búa í Vesturbæ Reykjavíkur og halda með tilteknu íþróttaliði. Flestir sem til þekkja mundu trúlega segja K.R.eða hvað? Það er sem sagt sterkt fylgnisamband.

13.4.1 Jákvæð fylgni

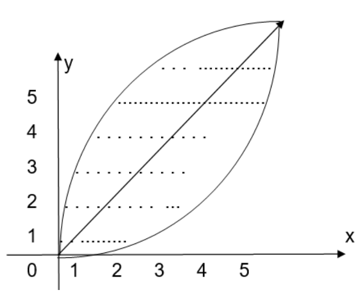
Það er eins og að vera sammála.

Dæmi:



Jákvæð fylgni = Þeim mun hærra sem þú ferð á x - ás þeim mun hærra ferðu á y – ás þannig væri 100% jákvæð fylgni = (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) og svo framvegis.

Dæmi: Nokkuð mikil jákvæð fylgni. Dreifing í kringum y = x.

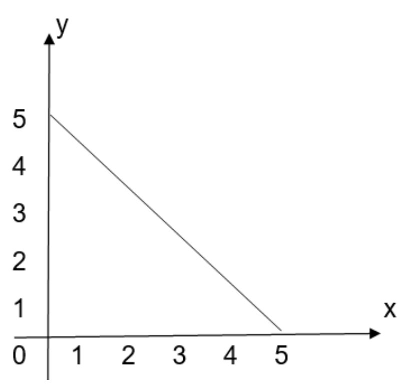


13.4.2 Neikvæð fylgni

Neikvæð fylgni er eins og vera ósammála. Þeim mun hærra sem þú ferð á y–ás þeim mun lægra ferðu á x–ás. Þannig að 100% neikvæð fylgni er til dæmis: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1).

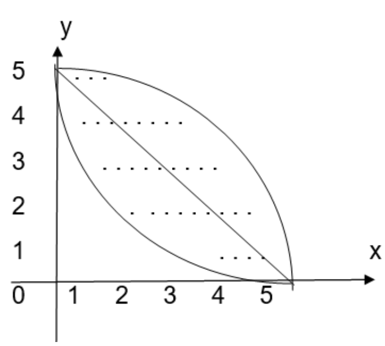
Dæmi:

100 % neikvæð fylgni. $r_{xy} = -1,00$



Dæmi:

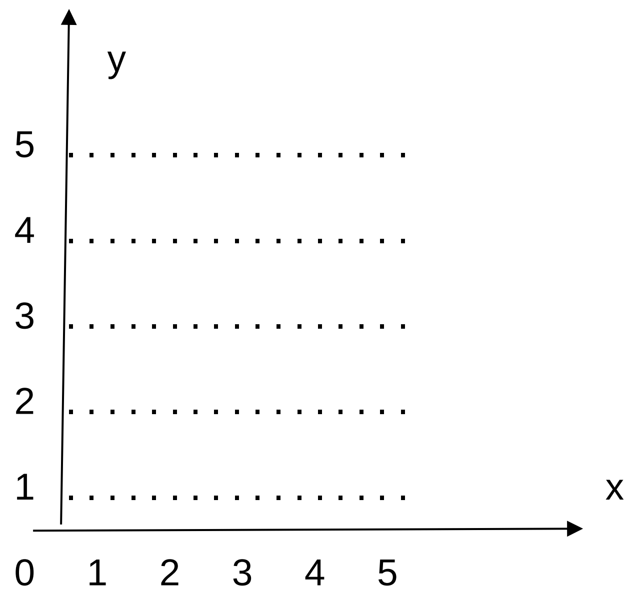
Nokkuð mikil neikvæð fylgni.



13.4.3 Lítil eða engin fylgni

Hvorki sammála né ósammála, þegar ekki er hækkandi eða lækkandi samband á milli x og y, þ.e. tilviljanakennd dreifing. Þá má segja að ekkert samband sé milli x og y. Fylgnin $r_{xy} = 0$.

Dæmi:



Engin fylgni.

$r_{xy} = 0$

13.4.4 Pearsonfylgni

Hægt er að reikna fylgni milli tveggja kvarða/dreifinga x og y með formúlu kenndri við Pearson. Ekki er hægt að segja að hún sé falleg en hún snýst um það að setja sex tölur inn í formúlu.

Formúla fyrir Pearsons r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{N\sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{(N\sum x^2 - (\sum x)^2)\,(N\sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

Glósum nú formúluna:

r_{xy} = fylgnistuðullinn á milli x og y
N = fjöldi mælinga
x = x–kvarðinn, mælingarnar
y = y–kvarðinn, mælingarnar
∑ = summa = samlagning

Best af öllu er að skoða lítið sýnidæmi um fylgni þar sem málið snýst um að setja sex tölur inn í formúluna.

N =	
$\sum x$ =	**Þessar sex tölur fást úr**
$\sum x^2$ =	**töflu,sjá sýnidæmið hér á eftir.**
$\sum x \cdot y$ =	
$\sum y$ =	
$\sum y^2$	

Skoðum nú hvernig tölurnar verða til í sýnidæminu hér á eftir. N = 6 Fjöldi mælinga.

x	y	x^2	y^2	x·y
2	3	4	9	6
3	4	9	16	12
4	7	16	49	28
5	6	25	36	30
7	5	49	25	35
8	10	64	100	80
$\sum x = 29$	$\sum y = 35$	$\sum x^2 = 167$	$\sum y^2 = 235$	$\sum x \cdot y = 191$

Dæmi:

Reiknaðu fylgnina á milli x og y

$$r_{xy} = \frac{N\sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{(N\sum x^2 - (\sum x)^2)\,(N\sum y^2 - (\sum y)^2)}} = \text{Innsetning gefur:}$$

$$r_{xy} = \frac{6 \cdot 191 - 29 \cdot 35}{\sqrt{(6 \cdot 167 - 29^2)\,(6 \cdot 235 - 35^2)}} =$$

$$r_{xy} = \frac{1146 - 1015}{\sqrt{(1002 - 841)\,(1410 - 1225)}} =$$

$$r_{xy} = \frac{131}{\sqrt{161 \cdot 185}} = \frac{131}{\sqrt{29785}} = \frac{131}{172{,}58} = \underline{0{,}76 = 76\%\ \text{fylgni.}}$$

Þú sérð að lægstu tölurnar á x-kvarðanum tengjast lægstu tölunum á y-kvarðanum og að hæstu tölur á x-kvarða tengjast hæstu tölum á y – kvarðanum. Þannig er nokkuð ljóst að um nokkuð sterka + fylgni er að ræða eða 0.76 = 76% fylgni sem er nokkuð sterk jákvæð fylgni. Skoðum nú dæmi um neikvæða fylgni þar sem lægstu tölur á x-kvarða tengjast hæstu tölum á y–kvarða og öfugt. Þá á líka að vera ljóst að um neikvæða fylgni er að ræða.

Dæmi:

Reiknaðu fylgnina á milli x og y. N = 6 Fjöldi mælinga.

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$
2	10	4	100	20
3	5	9	25	15
4	6	16	36	24
5	7	25	49	35
7	4	49	16	28
8	3	64	9	24
$\sum x =$ 29	$\sum y =$ 35	$\sum x^2 =$ 167	$\sum y^2 =$ 235	$\sum x \cdot y =$ 146

$$r_{xy} = \frac{N \cdot \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{(N \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2)\,(N \cdot \sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$ = **Innsetning gefur:**

$$r_{xy} = \frac{6 \cdot 146 - 29 \cdot 35}{\sqrt{(6 \cdot 167 - 29^2)\ (6 \cdot 235 - 35^2)}} =$$

$$r_{xy} = \frac{876 - 1015}{\sqrt{(\ 1002 - 841\ )\ (\ 1410 - 1225\ )}} =$$

$$r_{xy} = \frac{-139}{\sqrt{161 \cdot 185}} = \frac{-139}{\sqrt{29785}} = \frac{-139}{172{,}58} = -\ \underline{0{,}80{,}54 = -\ 80{,}54\%}$$

Það er satt, þessi dæmi úr fylgnireikningum r_{xy} eru frekar ljót og sundurlaus að sjá, þannig að nú reynir á stærðfræðilæsi þitt: að lesa flæði þessara færslna niður að lausninni.

Sjá hvernig x og y dálkarnir búa til x^2, y^2 og $x \cdot y$ dálkana

Sjá hvernig fimm summur talnanna: $\sum x$, $\sum y$, $\sum x^2$, $\sum y^2$, og $\sum x \cdot y$ ásamt N eru settar inn í formúluna

Átta sig á útreikningunum, sem á endanum búa til lausnina

Besta leiðin til þess að skilja er að lesa. Þú þarft að lesa þangað til þú skilur, þá kallast lesturinn nám.Svo þarf að endurtaka lesturinn fimm sinnum til þess að muna hann fyrir próf.

13.4.5 Raðfylgni – Spearman = r_s

Lítum nú á aðeins öðruvísi nálgun á fylgni þar sem fylgnin er fundin út frá mismun = D á röð talnanna en ekki gildi þeirra eins og hjá Pearson.

Formúlan fyrir raðfylgni r_s =

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

r_s = raðfylgni

D = mismunur raða

N = fjöldi mælinga

Það eru aðeins tvær tölur sem þarf að setja inn í þessa formúlu til þess að finna raðfylgnina = r_s. Það má nú segja að það sé ekki erfitt að setja tvær tölur inn í formúlu og reikna út úr henni með reikivél í hendi. Eins og alltaf er best að skilja formúlur og gangverk þeirra með því að skoða sýnidæmi.

Dæmi:

Sex kokkar gefa tveimur réttum A og B einkunn eftir gæðum: Nr. 1 = fyrsta sætið og svo framvegis. Reiknaðu raðfylgnina = r_s. Hér er um að ræða röðina frá 1 til 6 = fyrsta til sjötta sæti.

A	B	D = A - B	D^2
5	4	5 - 4 = 1	$1^2 = 1$
3	2	3 – 2 = 1	$1^2 = 1$
1	1	1 – 1 = 0	$0^2 = 0$
6	5	6 – 5 = 1	$1^2 = 1$
2	3	2 – 1 = (-1)	$(-1)^2 = 1$
4	6	4 – 6 = (-2)	$(-2)^2 = 4$
			$\sum D^2 = 8$

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 8}{6\,(36-1)}$

$r_s = 1 - \frac{48}{6 \cdot 35} = 1 - \frac{48}{210} = \frac{162}{210} = \frac{27}{35} = \underline{0{,}77 = 77\%\ \text{Fylgni.}}$

13.4.6 Hugtakið röð

Röð er frá 1, 2, 3............N, þar sem N er síðasta talan. Ef talan N = 6 þá er röðin : 1, 2, 3, 4, 5, 6 eins og í dæminu hér að framan. Hinsvegar ef á að reikna raðfylgni fyrir tölur sem eru ekki í réttri röð þ.e. frá 1, 2, 3......N. Það sem þá þarf að gera er raða tölunum upp í röð og ef tvær tölur eru í sömu röð þarf að finna meðaltal þeirra til þess að hægt sé að reikna raðfylgni.

Dæmi:

Nr. 1 er hæsta talan 10. Næst hæsta talan er 9 og svo framvegis. Raðaðu tölunum 7, 8, 7, 9, 10, 6 í rétta röð:

	Röð.	Röð
7	4 til 5	4,5
8	3	3
7	4 til 5	4,5
9	2	2
10	1	1
6	6	6

Hæsta talan er nr. 1 og lægsta talan nr. 6.
Hér eru tvær tölur í 4. til 5. sæti. Því þarf að finna meðaltal.

$$\frac{4+5}{2} = \underline{4{,}5}$$

Skoðum nú sýnidæmi um raðfylgni, þar sem tölurnar eru ekki í réttri röð.

Dæmi:

A	5	6	6	8	9	4
B	4	6	7	9	8	8

Fyrst þarf að raða þeim í röð.

A	B	A - röð	B - röð	D = A - B	D^2
5	4	5	6	5-6 = -1	1
6	6	3,5	5	3,5 -5 = -1,5	2,25
6	7	3,5	4	3,5 – 4 = -0,5	0,25
8	9	2	1	2 -1 = 1	1
9	8	1	2,5	1 – 2,5 = -1,5	2,25
4	8	6	2,5	6 – 2,5 = 3,5	12,25
					$\sum D^2 = 19$

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum D^2}{N\ (N^2 - 1\ )} = 1 - \frac{6 \cdot 19}{6\ (\ 6^2 - 1)} = 1 - \frac{114}{6(\ 36 - 1\ )} =$$

$$r_s = 1 - \frac{114}{6 \cdot 35} = 1 - \frac{114}{210} = \frac{96}{210} = \frac{16}{35} = \underline{0{,}46 = 46\%\ \text{fylgni.}}$$

13.5 Normaldreifing og Z-stig

Eftir því sem þekking á manninum vex og rannsóknir eflast sem rannsóknartæki kemur í ljós að mælingar á ákveðnum mannlegum einkennum hafa ákveðna dreifingu. Dæmi: þyngd, hæð, og greind manna. Þessi dreifing hefur ákveðin einkenni:

Speglun um miðju

N = Fjöldi mælinga verður að vera að minnsta kosti 30 til þess að dreifingin sé marktæk.

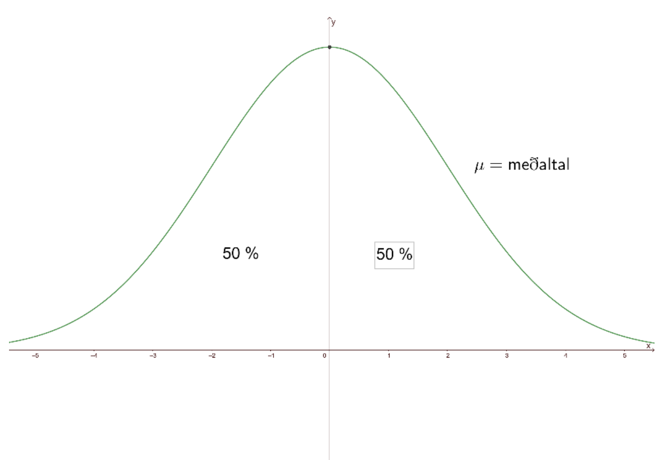
Grafið verður bjöllulaga

Meðaltalið er í miðjunni

Er óendanlegt í báðar áttir

Hægt að mæla prósentur með Z – stigs töflunni

Mynd af normaldreifingu:



Það að kasta tveimur krónupeningum gefur fjóra möguleika: Þ = þorskurinn og B = bergrisinn.

Þ B	Þ Þ	B Þ	B B

Þessi einfalda dreifing sýnir strax ákveðin einkenni normaldreifingar.

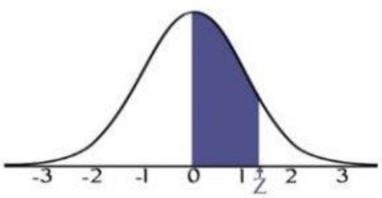
Athugaðu þó að mælingarnar þurfa að vera að minnsta kosti 30 til þess að fylla út í kúrfuna og vera marktækar. Kúrfan hefur gróft bjöllulag og speglast um miðju.

Fataframleiðanda fyndist gott að vita hve mörg prósent væri best að framleiða í stærðunum: x–small, small, medium, large og x–large, en normal – dreifingin getur sagt honum það.

Kynnumst nú normalkúrfunni aðeins betur og tengslum hennar við prósentudreifingu = Z – stigs taflan.

13.5.1 Normaldreifing og Z–stig

Normaldreifingin segir okkur líkur í prósentum. Öll normal-kúrfan er = 100%, 50% hvoru megin við miðju. Á myndinni hér fyrir neðan má sjá töflu fyrir Z-stig.



STANDARD NORMAL TABLE (Z)

Entries in the table give the area under the curve between the mean and z standard deviations above the mean. For example, for $z = 1.25$ the area under the curve between the mean (0) and z is 0.3944.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0190	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2969	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3513	0.3554	0.3577	0.3529	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

Z–stigs formúlan: $Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

Z = z–stigin frá 0 til 4,0 = 0 – 50%
x = ein stök mælieining
μ = meðaltalið, er alltaf í miðjunni
σ = staðalfrávik þýðis, hversu langt að meðaltali x – in dreifa sér frá miðju

Skoðum nú lítið dæmi um það hvernig við lesum úr Z – stigs töflunni:

Dæmi:

Hve mörg prósent eru á bilinu 0 til 1,55 Z – stig?

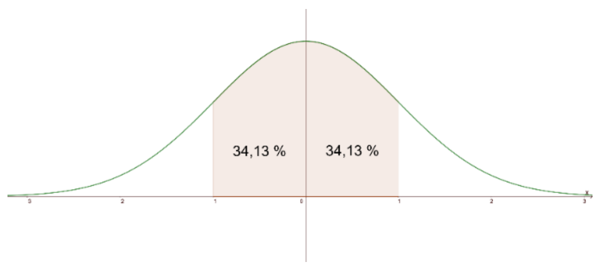
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2969	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3513	0.3554	0.3577	0.3529	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706

13.5.2 Tengsl Z – stigs töflunnar og normalkúrfu

Z–stigs taflan nær frá 0 til 3,4 Z stig og er að lýsa prósentum undir normalkúrfunni frá 0 til 50% í báðar áttir frá miðju.

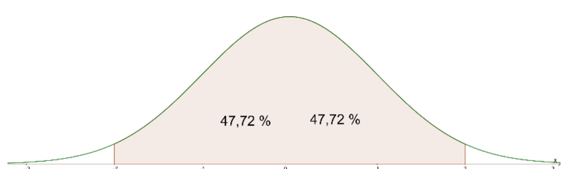
Dæmi:

Z = $\pm$ 1,0 = 34,13 %



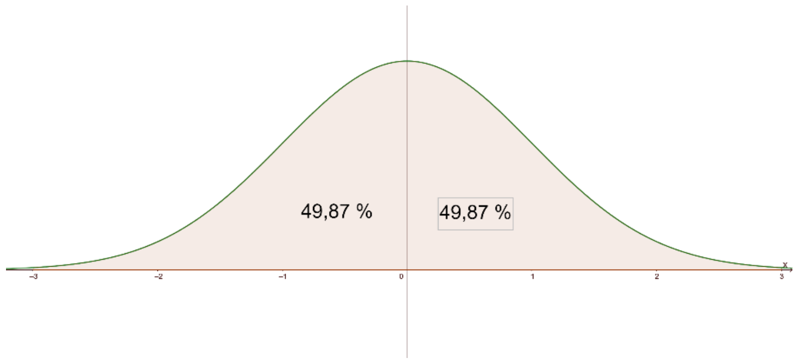
Dæmi:

Z = $\pm$ 2,0 = 47,72 %



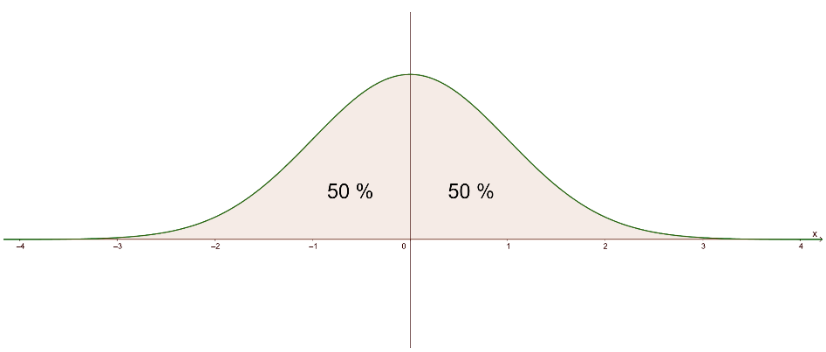
Dæmi:

Z = ± 3,0 = 49,87%



Dæmi:

Z = ± 4,0 = mjög nálægt 50%



13.5.3 Þýði

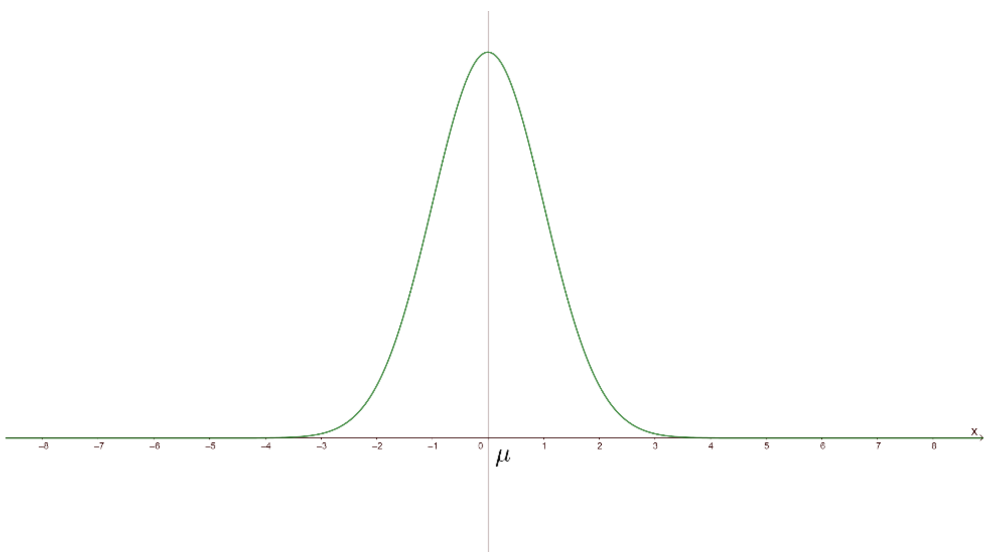
Þegar um þýði er að ræða þarf ekki að umreikna staðalfrávikið heldur er farið beint inn í Z–stigs formúluna.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Staðalfrávikið er ekki einn punkturinn í kúrfunni eins og Z, x og μ heldur segir staðalfrávikið frá því hversu langt mælingarnar dreifast frá miðju að meðaltali.

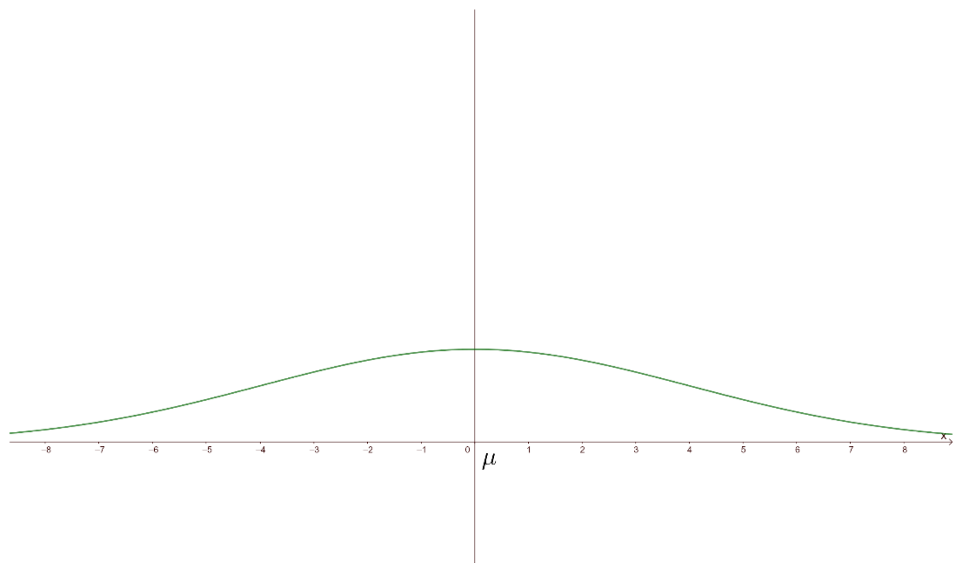
Dæmi:

Lítið staðalfrávik: σ = 1. Þá verður kúrfan há og mjó.



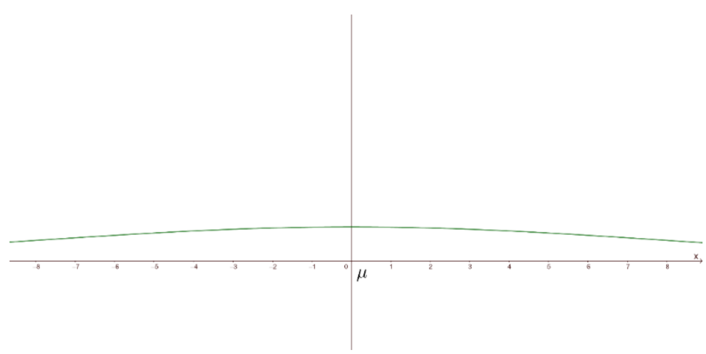
Dæmi:

Þó nokkurt staðalfrávik: σ = 4. Kúrfan verður lægri og breiðari.



Dæmi:

Mikið staðalfrávik: σ = 8. Kúrfan verður ennþá lægri og flatari.



13.5.4 Z–stigs taflan, Z-stigs formúlan og normalkúrfan

Segja má að normalkúrfan snúist um prósentureikning sem hefur þrjú birtingarform sem tengja þarf saman: Z–stigs töfluna, Z–stigs formúluna og normalkúrfuna.

Dæmi:

Meðaleinkunn í stærðfræði prófi er 60 stig, ef þú færð 80 stig og staðalfrávikið er 16 stig. Hve mörg prósent fá þá hærri einkunn en þú?

$\sigma = 16$

$\mu = 60$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$x = 80$

$$Z = \frac{80-60}{16} = \frac{20}{16} = \underline{1{,}25}$$

Z = 1,25 þá gefur Z–stigs taflan = <u>39,44%</u>

Túlkun á mynd: **50% + 39,44% = <u>89,44%</u>**

Hærri en 80 stig:

100% - 89,44% = <u>10,56</u>

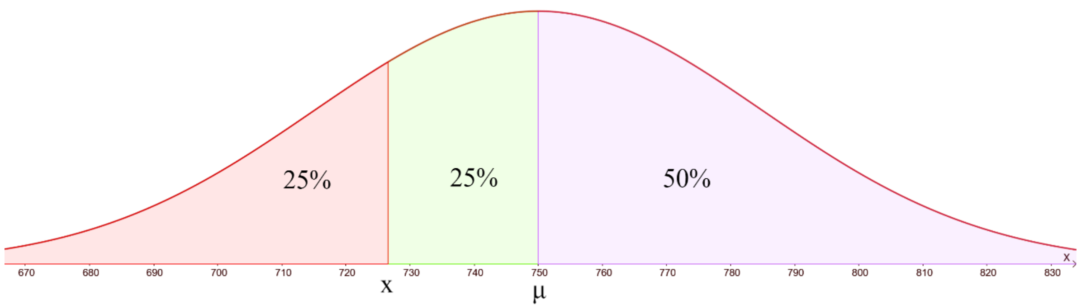
Skoðum nú annað sýnidæmi:

Dæmi:

Meðalstigafjöldi íslenskra tugþrautarmanna er 750 stig og staðalfrávikið er 35 stig. Yfir hvaða stigafjölda eru þá 25% tugþrautarkappanna?

μ = 750 stig. σ = 35 stig. Z = 25%

Z = 25% þá er Z = <u>- 0,67 stig</u>. Sjá mynd:



Reikna með Z–stigs formúlunni fyrir x–ið.

$Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ Z = -0,67, μ = 750 stig. σ = 35 stig.

$-0{,}67 = \dfrac{x-750}{35}$ Margfalda með 35 báðum megin.

-0,67·35 = x – 750 Færa -750 yfir = merkið.

750 – 0,67·35 = x

726,55 = x

x = <u>726,55 stig</u>

Skoðum eitt sýnidæmi til viðbótar:

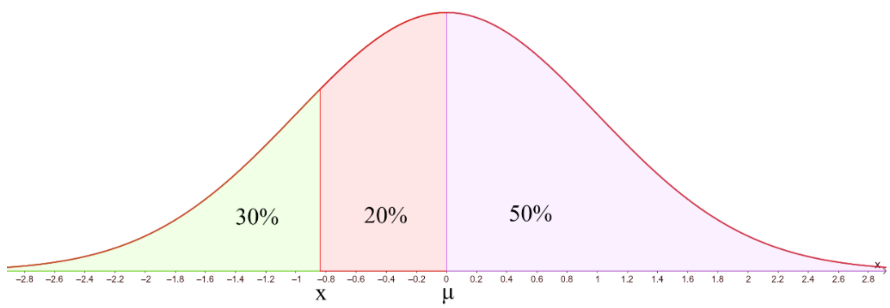
Dæmi:

Meðalhæð 700 nemenda í menntaskóla einum er 175 cm og staðalfrávikið 15 cm. 140 nemendur eru lægri en Anna. Hvert er Z – stig Önnu og hver er hæð hennar?

Finna prósentuna % = $\frac{h}{H}$ þá er % = $\frac{140}{700}$ = <u>20%</u>

Finna Z – stigið.

30% og þá er Z – stigið = <u>-0,84.</u> Sjá mynd:



Finna x með Z – stigs formúlunni:

Z = $\frac{x-\mu}{\sigma}$ Z = -0,84, $\mu = 175$, $\sigma = 15$

-0,84 = $\frac{x-175}{15}$ Margfalda með 15 báðu megin.

-0,84·15 = x – 175 Færa -175 yfir = merkið.

175 – 0,84·15 = x

x = 175 – 12,6

x = <u>162,4 cm.</u>

Í þessu sýnidæmi sést vel þessi þríleikur eða samspil á milli:

1. normalkúrfunnar
2. z – stigs formúlunnar
3. z– stigs töflunnar

Síðasta sýnidæmi reyndi vel á mynd-, tákn-, formúlu og töflulæsi. Hins vegar má segja að það sé ekki erfitt að lesa, ef þú ert vel læs.

Meginmarkmið þessa kafla um tölfræði er að vera lýsandi sýna hvernig hugtökin og formúlurnar vinna, hreyfa sig, sýna gangverkið og notkun formúlanna. Markmið kaflans er ekki að vera fræðilegur heldur: lýsandi, skýrandi og læsilegur veruleiki um leyndardóma tölfræðinnar.

Segja má að tölfræðin sé framandi og sérstakur texti aflestrar. Hinsvegar þarf svo ekki að vera. Með skarpri textarýni er auðvelt að skilja vel skrifaðan tölfræðilegan texta. Það er allavega von mín að þú hafir notið þess að lesa og skilja þennan skemmtilega texta um leyndardóma tölfræðinnar.

13.6 Hugtakaskrá

Andstæða atburðar: Fá ekki sex þegar tening er kastað

Atburður: Í líkindafræði: Líkur á að atburður gerist. Til dæmis að fá sex ef teningi er kastað

Bil: Bil í bilskiptri tíðnitöflu. Til dæmis frá 5 til 9 = Bilið 5 – 9

Bilskipting: Bilskipt tíðnitafla. Til dæmis frá 20 til 40 yrði skipt í bil:

20 - 24

25 - 29

30 - 34

35 – 40

Dreifing: Dreifing mælinga. Til dæmis hæð skólabarna

Dreifisvið: Hæsta mælitala – lægsta mælitala. Dreifisvið frá 1 til 5 = 5 -1 = 4

Ekki líkur: Líkur á að fá sex þegar teningi er kastað eru $= \frac{1}{6}$

Þá eru ekki líkurnar = að fá ekki sex = $\frac{5}{6}$

Líkur + ekki líkur eru alltaf = 1,00 = 100%

$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6}$ = 1,00 = 100% = Heildin

Frávikshlutfall: Prósentumælir sýnir hversu langt frávik víkja frá miðju. Formúlan:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

v = Frávikshlutfall.

s = Staðalfrávik.

$\bar{x}$ = Meðaltal.

100 = % er af hundrað.

Fylgni: atburðir sem fylgjast að. Til dæmis: að búa á Akueyri og halda með K.A

Fylgnistuðull: er á bilinu -1,00 til +1,00

Jákvæð fylgni = +

Neikvæð fylgni = -

Engin fylgni = 0

Gagnasafn: safn mælinga

Háður atburður: atburður hefur áhrif á næsta atburð. Í líkindum

Heildarfjöldi: N = heildarfjöldi mælinga

Heild: H = 100% = heildin

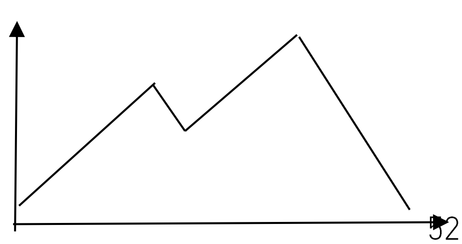
Hluti: h = hluti af heild

Hlutfall: Þýðir deiling. Hlutfallið á milli h og H = $\frac{h}{H}$ = %

Hlutfallsleg tíðni: Tíðni túlkuð sem prósenta. % = $\frac{h}{H}$

Hrópmerkt: X! = Takki á reiknivélinni. Til dæmis 4! = 4·3·2·1 = <u>24</u>

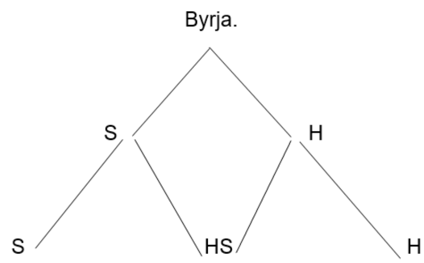
Línurit: Myndrit sem túlkar tíðn gagnasafns



Líkur: P(A) = Líkur á atburðinum A. Líkur er = %. Líkur á að fá:

3 möguleika af 6 = 3 / 6 = 0,5 = 50%

Líkindatré: Myndrit sem túlkar líkur.



Lýsandi tölfræði: Tölfræði sem lýsir: Gagnasöfnum og tölfræðilegum upplýsingum.

Meðaltal í bilskiptri tíðnitöflu: Formúlan: $\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x}{N}$

$\bar{x}$ = Meðaltal

$\sum$ = Summa, samlagning

F = Tíðni

x = Mæling

N = Heildarfjöldi mælinga

Miðpunktur bils: Miðpunktur bilsins 5 til 9 er $\frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = \underline{7}$

Miðgildi: Talan í miðjunni. Miðgildið í talnarununni: 1, 2, 3, 4, 5 er = 3 = Miðgildið.

Miðgildi í bilskiptri tíðnitöflu: Formúlan: Miðgildi = L + $\frac{k}{f_m}$ · c

L = neðri mörk bilsins sem miðgildið er á

k = hluti

f_m = heild

c = billengd

Margföldunarreglan: Endurteknar líkur eru margföldun.

Fá þorsk ef þú kastar einni krónu tvisvar: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ = 0,25

Meðalfrávik: Lýsir því hveru langt mælingarnar víkja að meðaltali frá miðju.

Formúlan: Meðalfrávik = $\frac{\sum \cdot f\,|x - \bar{x}|}{N}$

$\sum$ = summa, samlagning

f = tíðni

x = mæling

$|x - \bar{x}|$ = frávik

N = fjöldi mælinga

Meðaltal: $\bar{x}$ = Meðaltal talnasafna. Allar tölur lagðar saman og deilt með heildarfjölda.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$$

$\bar{x}$ = meðaltal

$\sum$ = summa

x = mæling

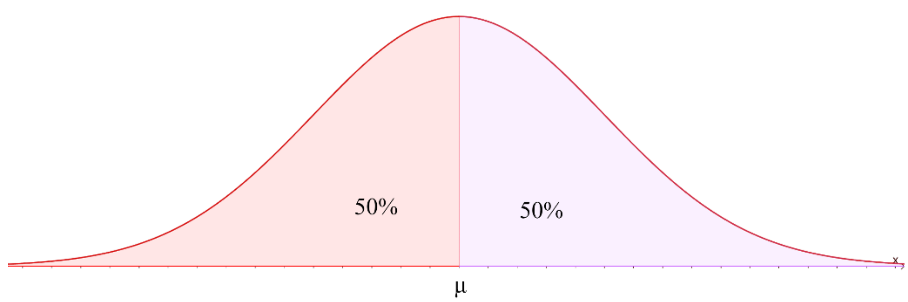
N = fjöldi mælinga

Mæling: x = Ein stök mæling

Myndrit: Að túlka gagnasafn með mynd. Til dæmis: Línurit, súlurit, skífurit eða stöplarit

Normaldreifing: Ákveðnir mannlegir eiginleikar dreifast bjöllulaga = Normaldreifing eins og til dæmis: hæð og þyngd

Mynd:



Ósamræmanlegar líkur: Dæmi: Fá einn og tvo í einu kasti ef þú kastar teningi

Prósenta: % = Hundraðshlutar. $\% = \dfrac{h}{H}$

% = prósenta

h = hluti

H = heild

Prósentutafla: Tafla sem túlkar prósentur

	Karlar	Konur	Alls
Með	40%	60%	100%
Móti	60%	40%	100%
Alls	100%	100%	

Pearson r_{xy} fylgni : Fylgni milli tveggja breyta x og y reiknuð með formúlunni:

$$r_{xy} = \frac{N\cdot\sum x\cdot y - \sum x\cdot\sum y}{\sqrt{(N\cdot\sum x^2 - (\sum x)^2)\ (N\cdot\sum y^2 - (\sum x)^2)}}$$

r_{xy} = fylgni á milli tveggja breytna x og y

N = fjöldi mælinga

∑ = summa

x = önnur breytan

y = hin breytan

Raðfylgni: Spearman = r_s = Fylgni milli tveggja raða reiknuð með formúlunni:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{N\ (\ N^2-1\ )}$$

r_s = raðfylgni

D = mismunur á röðunum

N = fjöldi mælinga

Samantektir: nCr = $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ að velja lítinn hóp úr stærri hóp. Ef röð skiptir ekki máli

Samanlögð tíðni: Að leggja saman tíðnidálkinn og enda með N = Heildarfjöldi mælinga.

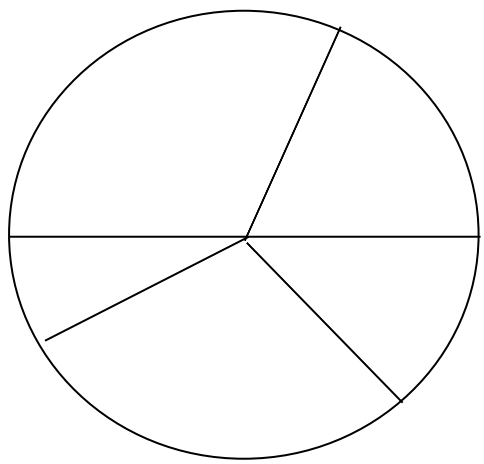
f = Tíðni	f_+ = Samanlögð tíðni
3	3
4	7
6	13
7	20
N = 20	

Samanlögð hlutfallsleg tíðni: Leggja saman prósentutíðnina og enda með 100%

Samlagningarreglan: Þegar um er að ræða líkur, sem eru ekki endurteknar þarf að leggja saman líkurnar. Dæmi: Fá sex og kasta aftur og fá einn, þegar tening er kastað:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Skífurit: Hringrit: Þegar tíðnidreifing er túlkuð í 360° hring



Staðalfrávik: Hversu langt að meðaltal mælingarnar víkja frá miðju = frávik

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x - \overline{x})}{N-1}}$$

s = staðalfrávik

$\sum$ = summa

x = mæling

$\bar{x}$ = meðaltal

N = fjöldi mælinga

Staðalfrávik í bilskiptri tíðnitöflu:

$$s = \sqrt{\frac{N \cdot \sum f \cdot x^2 - (\sum f \cdot)^2}{N\ (\ N-1\ )}}$$

s = staðalfrávik

N = fjöldi mælinga

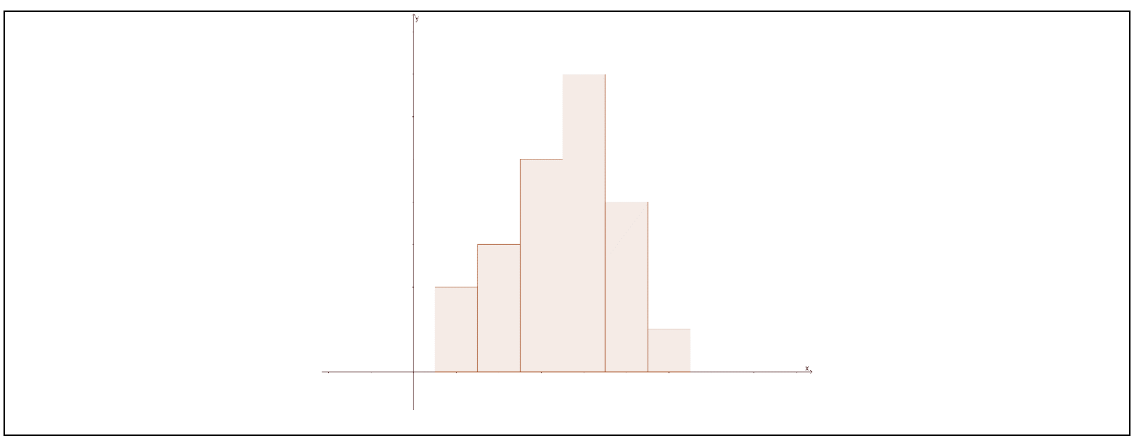
F = tíðni

x = mæling

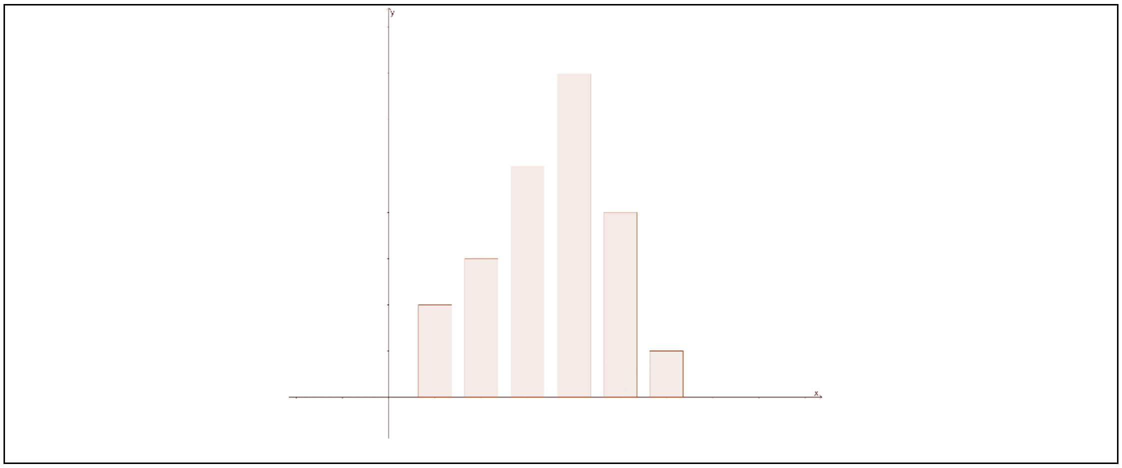
∑ = summa

Summa: ∑ = samlagning = summa

Stöplarit: Myndrit sem sýnir tíðni



Súlurit: myndrit sem sýnir tíðni



Talnasafn: Gagnasafn óflokkað

Tíðasta gildi: Það gildi, sem kemur oftast fyrir í gagnasafninu. Dæmi: 1, 2, 2, 2, 3 Tíðasta gildið = 2

Tíðni: f = Hversu oft hver mæling kemur fyrir í gagnasafninu

Tíðnitafla: Tafla sem lýsir tíðni

Tölfræði: Stærðfræði félagsvísindanna. Stærðfræði sem þú notar til þess að lýsa samfélaginu

Tvíliða formúlan: Reikna út líkur á að tvennt gerist í einu

$P = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

P = tvílíkur

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ = nCr = samantektir

p = líkur

q = ekki líkur

k = hluti

n = heild

Uppstokkanir = nPr

Úrtaksrými: Úrtaksrúm eru allir mögulegir atburðir í líkindum. Til dæmis er úrtaksrýmið, þegar þú kastar tening = allir sex möguleikarnir

Vegið meðaltal: $\bar{x}_v$ = Formúla notuð til þess að reikna meðaltal þegar tölurnar vega ekki jafnt

$$\bar{x}_v = \frac{\sum(v \cdot x)}{\sum v}$$

$\bar{x}_v$ = vegið meðaltal

$\sum$ = summa

v = vægi

X = mæling

Z–stig: Z–stig segir til um stærð prósentu undir normalkúrfu

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Z = z–stig

x = ein stök mæling

μ = meðaltal

σ = staðalfrávik

Z–stigs taflan: Tafla frá 0% - 50% og lýsir prósentu í hálfri normalkúrfu Z - stig frá 0 til 3,4

Þýði: Dregið af þjóð. Hópurinn sem á að rannsaka = heildin